This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

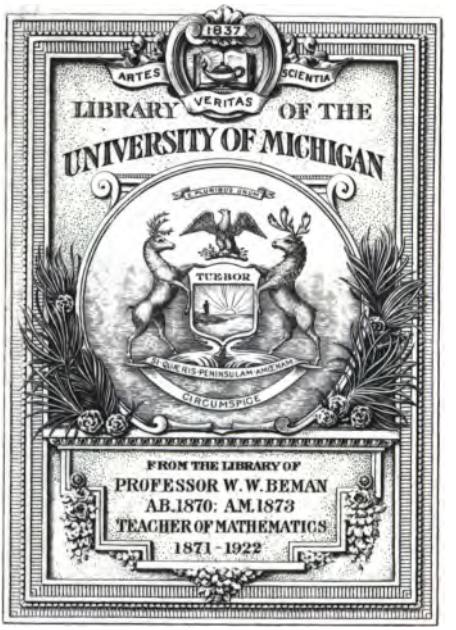
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
A.B. 1870: A.M. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922

Mathematics
QA
1-83
.N 14

Mathematics
QA
483
.R94

Untersuchung

einer

neuen krummen Linie

(Kreisconchoide)

und ihrer Beziehungen zur gewöhnlichen Conchoide,
der Cyssoide und dem descartischen Folium.

Beilage

zum Programm des Großh. Lyceums zu Heidelberg. 1869

von

Friedrich Kummer,
Professor am Lyceum und an der Universität.

Mit einer Figurentafel.

Heidelberg.
Buchdruckerei von G. Mohr.
1869.

Math-
QA
483
.R94

Math
gift
Lit of W. Beman
5-3-33

Einleitung.

In der Beilage zum Programm des Lyceums zu Heidelberg von 1868 habe ich die Untersuchung einer Reihe von Curven angedeutet, welche durch die Bewegung eines Punkts auf den Strahlen eines festen Punktes entstehen, die nach einer festen Geraden gezogen werden.

Es wurde dort der Fall betrachtet: wenn die Strahlenstücke gleich den zugehörigen Abschnitten der Geraden sind, und die betreffende krumme Linie wurde — wegen ihren besonderen Eigenschaften — die harmonische Curve genannt.

In ähnlicher Weise soll nun hier eine andere Linie dieser Gruppe untersucht werden, welche ähnliche Eigenschaften hat wie die Conchoide, und von welcher die Cyssoide und die harmonische Curve nur specielle Fälle sind.

Für die Cyssoide und das descartische Folium (welches ebenfalls mit unserer Curve in einfacher Beziehung steht) werden wir dabei auch einige neue Sätze ableiten.

§. 1. Entstehung und Construction der Curve. Fig. 1.

Ein Punkt f bewegt sich so über die Strahlen (wie pf) eines festen Punkts p (Pols), und über einer Geraden NJ' (Leitlinie), daß diese auf jedem Strahl zwei Abschnitte bildet, deren Rechteck (fn . np) eine constante Größe ($= b^2$) hat.

Die Seite b des constanten Quadrats, z. B. $b = mq$, wollen wir den Parameter nennen, und den Polabstand $pm = a$ setzen; daher ist:

$$fn \cdot np = b^2 = mq^2.$$

Zur Construction der Curvenpunkte (z. B. von f) errichtet man im Schnittpunkt n der Leitlinie und des Strahls auf diesen eine Senkrechte no = b = mq; so gibt of ⊥ op den Punkt f. Ebenso folgt der Punkt s in der Senkrechten ps durch qs ⊥ pq (da mq = b ist).

Trägt man nf nach nf', so ergibt sich auf jedem Strahl ein 2ter Punkt f', für welchen ebenfalls

$$f'n \cdot np = b^2;$$

und ebenso gibt ms' = ms den Punkt s' in der Axe ms'.

Die Punkte wie w ergeben sich durch Nw = JN oder durch einen Halbkreis über pN und NP = b so wie Pw ⊥ pN; weil dann

$$pN \cdot Nw = PN^2 = b^2 \text{ ist.}$$

Man erhält auf diese Art zwei Curvenäste JsR und wps'uS auf beiden Seiten der Leitlinie, mit den beiden Scheiteln s und s' und dem Kreuzungspunkt p.

Einfachere Constructionen folgen in §. 2, Nro. 9.

§. 2. Einfache Sätze. Fig. 1.

Aus der Erklärung folgt:

fn : b = b : pn und f'n : b = b : pn, d. h.

1) Der Parameter ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten, welche jeder Curvenpunkt und die Leitlinie auf jedem Polstrahl bilden.

2) Jede der beiden Curven besteht aus 2 symmetrischen Hälften in Bezug auf die Axe ms (ms'); und die Leitlinie NT ist eine Asymptote beider Aeste; da die Stücke (wie nf und nf') desto kleiner werden je mehr pn zunimmt.

3) Der Pol ist ein Punkt der unteren Curve, für den Strahl pb = bl = dem Parameter b.

Da fn . np = b^2 und für irgend einen 2ten Punkt l auch: bl . pb = b^2, so verhält sich:

fn : bl = pb : np und f'n : b'u = b'p : np,

ebenso: fn : sm = pm : pn und f'n : s'm = pm : pn, d. h.

4) Die Strecken aller Polstrahlen zwischen Curve

und Leitlinie verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen zwischen Pol und Leitlinie.

Wenn die Abscissen auf der Axe ms genommen werden, z. B. mg = x für Punkt f (und mg' für f') so folgt:

nf : np = mg : pm, also nf^2 : nf . np = mg : pm.

Da aber nf . np = b^2, mg = x und pm = a,

nf^2 : b^2 = x : a, und nf'^2 : b^2 = mg' : a, d. h.

5) Das Quadrat des Stücks jedes Polstrahls zwischen dem Curvenpunkt und der Leitlinie verhält sich zum Quadrat des Parameters wie die Abscisse zum Polperpendikel pm.

Setzen wir die Axe ms (ms') = c, also a . c = b^2, oder $c = \frac{b^2}{a}$, so ist (N. 5): $nf^2 = \frac{b^2 x}{a} = cx$, oder c : nf = nf : mg und ebenso c : nf' = nf' : mg', d. h.

6) Die Strecke jedes Polstrahls zwischen der Curve und der Leitlinie ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Axe und der Abscisse vom Mittelpunkt m.

Ferner verhalten sich die Quadrate der Strecken je zweier Polstrahlen zwischen Curve und Leitlinie wie die zugehörigen Abscissen.

Beschreibt man über der Axe ms (ms') als Durchmesser einen Kreis sdm, so gibt die Sehne dm des Schnittpunkts d der Ordinate fg:

dm^2 = ms . mg = cx = nf^2;

also ist nf = dm, und da fd ∥ mn, so ist auch nf ∥ dm und fd = mn.

Ebenso ist für die untere Curve f'n = md' und f'd' = mn, daher die Sätze:

7) Die Strecke jedes Polstrahls zwischen der Curve und der Leitlinie ist gleich und parallel zur zugehörigen Kreissehne; und:

8) Der Unterschied fd (f'd') zwischen der Curvenordinate und der zugehörigen Ordinate des Kreises ist = dem Abschnitt, welchen der Polstrahl auf der Leitlinie bildet.

Hieraus folgen zwei einfache Constructionen der Curven:

9) Ziehe von m irgend eine Kreissehne dm (d'm), mit dieser parallel einen Polstrahl fpk' und trage die Sehne auf diesem von der Leitlinie aus (nach nf und nf') ab. Oder:

Ziehe irgend eine Kreisordinate dg (d'g'), parallel zur zugehörigen Sehne md den Strahl pn und trage den Abschnitt mn der Leitlinie von d aus in die Verlängerung df der Ordinate (oder unten nach d'f' auf die Ordinate).

Die ähnlichen Dreiecke pfg und pg'f' geben den Satz:

10) Die Ordinaten zweier zu demselben Polstrahl gehörigen Curvenpunkte verhalten sich wie ihre Polstrahlen, oder wie ihre Abstände (Abscissen) vom Pol p.

fg : dg = pg : mg und f'g' : d'g' = pg' : mg', geben den Satz:

11) Jede Curvenordinate verhält sich zur zugehörigen Kreisordinate wie ihr Abstand vom Pol zu ihrem Abstand vom Fußpunkt m (oder zur Abscisse des Mittelpunkts m).

Ebenso geben: fg : fd = pg : pm und f'g' : f'd' = pg' : pm

12) Jede Curvenordinate verhält sich zum Unterschied zwischen ihr und der Kreisordinate, wie ihr Abstand vom Pol zum Polperpendikel pm.

§. 3. Gleichungen der Curve. Fig. 1.

a) Nimmt man mg = x, fg = y, so ist

$dg = \pm\sqrt{mg \cdot sg} = \pm\sqrt{x(c-x)}$, also gibt Nro 11 für die obere Curve:

$y : \pm\sqrt{x(c-x)} = pg : gm = a + x : x$, daher ist:

13) $y = \pm\frac{x+a}{x}\sqrt{x(c-x)} = \pm(x+a)\sqrt{\frac{c-x}{x}}$

die Gleichung der oberen Curve für Abscissen vom m.

Für die untere Curve verhält sich, wenn mg' = x, f'g' = y

$y : \pm\sqrt{x(c-x)} = pg' : mg' = x - a : x$; also ist:

14) $y = \pm \frac{x-a}{x} \sqrt{x(c-x)} = \pm (x-a) \sqrt{\frac{c-x}{x}}$

die Gleichung der untern Curve für Abscissen von a.

Die Gleichungen der beiden Curvenäste unterscheiden sich also nur in den Zeichen von a, da pm im 2ten Fall in Bezug auf c die entgegengesetzte Lage hat.

Diese Gleichungen folgen auch unmittelbar aus der Definition der Curve; nämlich:

$nf : np = mg : pm = x : a$ gibt:

$nf^2 : np \cdot nf$ oder $b^2 = x : a$, also $nf^2 = \frac{b^2}{a} x = cx$ (wie in 6).

Da $pf : nf = pg : mg$, oder $pf : \sqrt{cx} = a + x : x$, so ist: $pf = \frac{a+x}{x} \sqrt{cx}$, und $y^2 = pf^2 - pg^2$ gibt:

$$y^2 = (a+x)^2 \cdot \frac{c}{x} - (a+x)^2 = (a+x)^2 \cdot \frac{c-x}{x}.$$

Wie in 13. Ebenso kann Nro 14 unmittelbar abgeleitet werden.

b) Setzt man den ∢ fps Fig. 1, den irgend ein Polstrahl $pf = z$ mit der Axe bildet $= \varphi$, so ist auch ∢ dms $= \varphi$ und

$dm = ms \operatorname{Cos} \varphi = c \operatorname{Cos} \varphi$, also auch $fn = c \operatorname{Cos} \varphi$, und da $\frac{pm}{pn} = \operatorname{Cos} \varphi$, also $pn = \frac{a}{\operatorname{Cos} \varphi}$, so folgt:

15) $pf = z = c \operatorname{Cos} \varphi - \frac{a}{\operatorname{Cos} \varphi}$

als Polargleichung für die obere Curve für ps als Axe.

Für die untere ist, wenn $f'ps' = \varphi$ und $pf' = z$ gesetzt wird:

$$pf' = nf' - pn = md' - pn, \text{ also:}$$

16) $pf' = z = c \operatorname{Cos} \varphi - \frac{a}{\operatorname{Cos} \varphi}$

die Polargleichung der unteren Curve für ps' als Axe.

c) Nimmt man den Pol p als Anfangspunkt der Abscissen, $pg = x'$, so ist $x = x' - a$, also nach N. 13:

17) $y = \pm x' \sqrt{\frac{c+a-x'}{x'-a}}$

die Gleichung der oberen Curve für Abscissen von p.

Ferner für $pg' = x'$, also $x = mg = a + x'$ aus 14:

18) $y = \pm x' \sqrt{\frac{c-a-x'}{x'+a}}$

die Gleichung der unteren Curve für Abscissen von p.

Auch diese beiden Gleichungen, sowie Nro 15 und 16 unterscheiden sich nur in dem Zeichen von a.

d) Nimmt man aber den Scheitel s Fig. 1 als Anfang der Abscissen, z. B. $sg = u$ und $sg' = u$ (für die untere Curve) so ist in beiden Fällen $x = c - u$ statt mg und mg' in den Gleichungen 13 und 14 zu substituiren.

Man erhält dann aus beiden die allgemeine Gleichung:

19) $y = \frac{c+a-u}{c-u} \sqrt{(cu-u^2)} - \frac{c}{x} \cdot s$

als Gleichung für die Abscissen vom Scheitel s (oder s'), wobei das obere Zeichen vor a für die obere Curve und das untere für die untere Curve gilt.

Anmerkung. Aus den Gleichungen 13, 14, 17 und 18 folgen leicht die schon angeführten Sätze über die Scheitel, den Pol, Symmetrie, Asymptote u. s. w.

Aus Nro 19 wollen wir einen weiteren Lehrsatz ableiten:

In Fig. 2 sei Jvs irgend eine obere Curve, gl und JL sind zwei Ordinaten, gleichweit vom Kreismittelpunkt entfernt (also $sl = ml' = u$), so ist nach Nro 19 für $sm = c$:

$$gl = \frac{c+a-u}{c-u} \sqrt{(cu-u^2)} = \sqrt{(cu-u^2)} + \frac{a}{c-u} \sqrt{(cu-u^2)}, \quad gl = dl + \frac{a}{c-u} \sqrt{(cu-u^2)}; \text{ also: } gl - dl,$$

oder: $gd = \frac{a}{c-u} \sqrt{(cu-u^2)} = \frac{a}{c-u} \cdot dl.$

Da nun ml' ebenfalls $= u$, so ist nach Gleichung N. 13, wenn für x der Werth $ml' = u$ gesetzt wird:

$$JL = \frac{u+a}{u} \sqrt{(cu-u^2)} = \sqrt{(cu-u^2)} + \frac{a}{u} \sqrt{(cu-u^2)} \text{ oder } JN = \frac{a}{u} \sqrt{(cu-u^2)} = \frac{a}{u} \cdot dl \text{ (da } Nl' = dl)$$

mithin: $gd + JN = \left(\frac{a}{c-u} + \frac{a}{u}\right) dl = \frac{a \cdot c \quad : dl}{cu - u^2}$ oder dl^2

$gd + JN = \frac{a \cdot c}{dl} = \frac{b^2}{dl}$; d. h.:

20) Je zwei gleichweit vom Kreismittelpunkt c entfernte Parallele zur Leitlinie, zwischen der oberen Curve und dem Axenkreis, sind zusammen = dem Quadrat des Parameters getheilt durch die zugehörige Kreisordinate.

§. 4. Verschiedene Formen der unteren Curve.

In Fig. 1 war b > a angenommen, die untere Curve hatte den Pol als Kreuzungspunkt, bestand aus einem asymptotischen Theil zwischen dem Pol und der Leitlinie und einem blattähnlichen ps' auf der entgegengesetzten Seite des Pols.

21) Wird b = a = pm, also der Parameter = dem Polabstand, also auch c = a, so erhält die untere Curve die Form Fig. 2. Wir wollen diese Curve die gleichseitige nennen.

Die Construction der unteren Curve geschieht nach §. 2 Nro 9, durch eine beliebige Kreissehne md' und Abtragen derselben auf die Polparallele np, also nf' = md'.

Die untere Curve erhält hier eine Spitze im Pol und die Ovale oder das Folium ps' in Fig. 1 verschwindet.

Da nun pi = md', also auch nf' = pi, so wird in diesem Fall die untere Curve eine Cyssoide.

Setzt man in Gleichung 18 für den Curventheil wp Fig. 1, da x' in jener von p gegen s' gerechnet war, x' negativ (von p gegen m) und c = a, so folgt aus 18 die Gleichung:

$$y = \pm x' \sqrt{\frac{x'}{a - x'}}$$

welches die Gleichung der Cyssoide ist.

Die Cyssoide ist demnach ein specieller Fall unserer unteren Curve; wenn nämlich Parameter und Polabstand gleich sind.

Da $np \cdot nf' = b^2$ also hier $= mp^2$ ist, so folgt der Satz:

Die Cyssoide theilt auf allen Strahlen, welche

von ihrer Spitze p nach der Asymptote gezogen sind, Stücke ab (wie nf'), die mit dem ganzen Strahl pn Rechtecke von constanter Größe = pm² bilden.

Man kann daher die Cyssoide ebenso wie die gleichseitige Hyperbel zur Lösung der Aufgabe anwenden:

Alle Rechtecke zu construiren, welche gleich einem gegebenen Quadrat sind.

22) Hieraus ergibt sich eine einfache Construction der beiden gleichseitigen Curven — oder für den Fall, daß das Rechteck der Strahlenstücke = dem Quadrat des Polabstands ist.

Fig. 2. Ziehe beliebige Secanten (wie pf) und trage die Kreissehne pi von n aus nach beiden Seiten auf den Strahl (nach nf und nf'), so folgen die 2 Curvenpunkte f und f'.

In diesem Fall (b = c = a) ist für jeden Punkt f (Fig. 2) pf = pm + nf = pn + nf' und pf' = pn − nf'; also: $pf^2 - pf'^2 = (pn + nf')^2 - (pn - nf')^2 = 4\,pn \cdot nf' = 4b^2 = ps^2$, oder:

$pf^2 - pf'^2 = ps^2$.

Da ferner uf = pf' (un — fn = pn + nf') so ist auch:

$pf^2 - uf^2 = ps^2$ und ebenso $fu^2 + f'p^2 = ps^2$, d. h.:

23) Für die gleichseitige Curve ist der Unterschied der Quadrate zweier zusammengehörigen Polstrahlen constant, und zwar = dem Quadrat der ganzen Axe (ps^2); und jede der Curven theilt jeden vom Pol p nach der Geraden BC gezogenen Strahl in 2 Abschnitte, deren Quadrate um das Quadrat des Abstands ps differiren.

24) Wenn aber endlich b < a, so ist auch c < a und die Curven erhalten dann eine ähnliche Gestalt wie in Fig. 4. Die untere trifft dabei den Polabstand in s' zwischen dem Pol und dem Fußpunkt m; wenn pm = a, ml = b also für ks ⊥ lp, ms und ms' = c ist.

25) Wenn c = 2a, also $b^2 = 2a^2$, so folgt aus Gleichung Nro 18 für diesen Fall:

$$y = \pm x' \sqrt{\frac{a - x'}{a + x'}},$$

wo x' auf ps' in p Fig. 1 anfängt.

Wird hier x' negativ (von p gegen m), so ist die Gleichung:

$$y = \pm x' \sqrt{\frac{a + x'}{a - x'}}.$$

Diese Gleichungen gehören aber der harmonischen Curve an (siehe die Beilage zum Programm von 1868: Neue Sätze über eine krumme Linie.).

Die harmonische Curve ist daher ebenfalls ein specieller Fall der unteren Curve, für die Annahme, daß das Quadrat des Parameters doppelt so groß ist, als das Quadrat des Polperpendikels pm.

Der Pol p liegt dann $\left(\text{da } a = \frac{c}{2}\right)$ in der Mitte der Axe.

§. 5. Vergleichung der Curve mit der Conchoide. Fig. 1.

Die Form der oberen Curve und namentlich die 3 verschiedenen Formen der unteren, welche auch bei der gewöhnlichen Muschellinie des Nikomedes vorkommen, wenn deren Regel (hier c) größer, oder gleich, oder kleiner als der Polabstand ist, führt auf die Vergleichung beider Curven.

Die Conchoide ihsi Fig. 1 entsteht bekanntlich dadurch, daß man die Regel ms auf den Polstrahlen von der Leitlinie aus abträgt; es wird also nh = ms, ti = ms u. s. w. und die untere Conchoide folgt durch Abtragen der Regel ms nach der entgegengesetzten Seite.

Da nun nach Nro 6: $nf^2 = mg \cdot ms$, und $nh^2 = ms^2$, so verhält sich $nf^2 : nh^2 = mg : ms$, d. h.:

26) **Die Quadrate der Strahlenstücke zwischen der Leitlinie und unserer Curve verhalten sich zu den zugehörigen der Conchoide, wie die Abscissen der Punkte unserer Curve zur Axe ms.**

Die Gleichung der Conchoide isi ist für $pm = a$, $ms = c$, $mg = x$ und $gi = Y$:

$$gi = Y = \pm \frac{x + a}{x} \sqrt{(c^2 - x^2)}$$

während bei der andern Curve Jfs nach Nro 13:

$$fg = y = \pm \frac{x + a}{x} \sqrt{(cx - x^2)}; \text{ daher:}$$

$Y : y = \sqrt{(c + x)} : \sqrt{x}$, oder:

$Y^2 : y^2 = c + x : x$; also $ig^2 : fg^2 = sg : mg$, d. h.:

27) Die Quadrate der zusammengehörigen Ordinaten der Conchoide und der Curve J/s verhalten sich wie der Abstand der Ordinaten vom unteren Scheitel s' zum Abstand vom Fußpunkt m.

Beschreibt man mit ms um m als Mittelpunkt den Kreis ser, so ist die Ordinate desselben:

$eg = \sqrt{(em^2 - mg^2)} = \sqrt{(c^2 - x^2)}$ und $dg = \sqrt{(cx - x^2)}$.

Daher verhält sich nach Ableitung zu 27:

$Y : y = \sqrt{(c^2 - x^2)} : \sqrt{(cx - x^2)} = eg : dg$, oder:

ig : fg = eg : dg.

Nennen wir den Kreis sdm, dessen Durchmesser = ms den kleinen — und den Kreis ser, der den Halbmesser ms hat, den großen Kreis, so folgt aus dieser Proportion der Satz:

28) Die zusammengehörigen Ordinaten der Conchoide und unserer Curve verhalten sich wie die dazugehörigen Ordinaten des großen und des kleinen Kreises.

Wegen diesen einfachen Beziehungen der Curve zur Conchoide und zum Kreis nennen wir dieselbe:

Kreisconchoide.

29) Die gewöhnliche Conchoide isi' hat eine ähnliche Beziehung zum großen Kreis, wie die Kreisconchoide zum kleinen. In der Muschellinie isi' ist nämlich für pi # zum Radius em, die Strahlenstrecke it = c = em, wie bei der Kreisconchoide fn gleich und # zu Sehne dm (siehe Nro. 7).

Da die untere Conchoide (für x negativ) die Gleichung

$$Y = \mp \frac{x - a}{x} \sqrt{(c^2 - x^2)} \text{ ist,}$$

so folgt durch die Vergleichung mit Nro. 14, auch für die untern Aeste beider Curven:

$Y : y = \sqrt{(c^2 - x^2)} : \sqrt{(cx - x^2)} = \sqrt{(c + x)} : \sqrt{x}$

also dieselbe Beziehung wie bei den oberen Curven.

Die Polargleichung der Muschellinie ist für nh = Z, wenn $\sphericalangle$ hps = φ; ph = nh + pn

$$Z = c + \frac{a}{\cos \varphi}$$

während für die Kreisconchoide der Polstrahl pf nach Nro. 15, $z = c \operatorname{Cos} \varphi + \frac{a}{\operatorname{Cos} \varphi}$ war.

Die Differenz zweier zusammengehörigen Polstrahlen ist also: $Z - z = hf = c\,(1 - \operatorname{Cos} \varphi)$, oder $Z - z = hf = c \operatorname{sinvers} \varphi = kd$, d. h.:

30) Jeder Polstrahl der gewöhnlichen Conchoide übertrifft den zugehörigen der Kreisconchoide um den Unterschied der Axe ms und der parallelen Sehne md des kleinen Axenkreises.

Dieß folgt auch aus $hn = c = km$ und $fn = dm$; also $hf = kd$.

§. 6. Vergleichung eines besonderen Falls der unteren Kreisconchoide mit dem descartischen Folium. Fig. 5.

Wenn für zwei rechtwinklige Gerade OD und nT (Fig. 5) als Coordinatenaxen, für den Punkt p als Anfangspunkt die Curve construirt wird, deren Gleichung:

$$x^3 + y^3 = Axy,$$

wo A eine gegebene Gerade bezeichnet, so entsteht das zuerst von Descartes untersuchte Folium pFs', welches aber außerdem noch einen Ast pV (und pV') auf der andern Seite des Pols p hat.

Für $x = \frac{A}{2} = pU'$ wird $y^3 - \frac{A^2}{2} y + \frac{A^3}{8} = 0$; woraus: $y^3 - \frac{A^2}{4} y - \frac{A^2}{4} y + \frac{A^3}{8} = 0$, also:

$$y\left(y^2 - \frac{A^2}{4}\right) - \frac{A^2}{4}\left(y - \frac{A}{2}\right) = 0, \text{ oder } \left(y - \frac{A}{2}\right)\left[y\left(y + \frac{A}{2}\right) - \frac{A^2}{4}\right] = 0, \text{ und ein Werth } y = \frac{A}{2} \text{ folgt.}$$

Dieser gibt den Punkt s' für $U's' = \frac{A}{2} = pU'$.

Nimmt man die Gerade ps' als Abscissenaxe (welche den erstangenommenen Coordinatenwinkel halbirt, $pR = x'$, $FR = y'$ (für irgend einen Punkt F), also $pU = x$, $UF = y$, so gibt die Verlängerung von FR bis O:

OU = UF = y, OF = $y\sqrt{2}$, OR = pR = x', und:
OR = OF + FR, also $y\sqrt{2} + y' = x'$,

$$\alpha) \quad y = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$$

Da aber $pO = pR\sqrt{2} = x'\sqrt{2} = pU + OU = x + y$, so ist $x = x'\sqrt{2} - y$, also nach Gleichung α:

$$\beta) \quad x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Setzt man diese Werthe in die Grundgleichung, und für $ps'^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{2}$ den Werth b'^2, wo also $ps' = b'$ ist und $A = b'\sqrt{2}$, so ergibt sich:

$$\gamma) \quad y' = \pm x' \sqrt{\frac{b' - x'}{b' + 3x'}}$$

als Gleichung des descartischen Foliums für die Abscissenaxe ps', den Anfangspunkt p und $ps' = b'$.

Nimmt man $pm = -\frac{b'}{3}$ statt x', so wird y' unendlich und die Gerade MN erscheint als Asymptote der Curventheile pV und pV'.

δ) Die größte Ordinate des Foliums hat die Abscisse $\frac{b'}{3}\sqrt{3}$, und ist $= \frac{b'}{3}\sqrt{[2\sqrt{3} - 3]}$,

ε) Der Inhalt des Foliums ist $= \frac{1}{3} b'^2$ und die asymptotische Fläche auf der andern Seite des Pols p ist ebensogroß als das Folium.

Vergleichen wir mit dieser Curve denjenigen Fall, (Fig. 3) der unteren Kreisconchoide, in welchem ebenfalls $ps' = 3pm$, also ms' oder $c = 4pm = 4a$ ist; so muß $ps' = b' = 3a$ also $a = \frac{b'}{3}$ und $c = \frac{4b'}{3}$ in die Gleichung 18 gesetzt werden, wodurch aus dieser:

$$y = \pm x' \sqrt{\frac{b' - x'}{\frac{b'}{3} + x'}} = \pm x' \sqrt{\frac{3(b' - x')}{b' + 3x'}}$$

entsteht, welche im Vergleich mit der Gleichung (γ) des Foliums pFs', (Fig. 3) welches für dieselbe Axe ps' gilt:

$y = y'\sqrt{3}$ sich ergibt; also ist LR = FR$\sqrt{3}$, d. h.:

31) Für $c = 4a$, also $ps' = 3pm$ sind die Ordinaten der unteren Kreisconchoide gleich den zu denselben Abscissen gehörigen Ordinaten des descartischen Foliums multiplicirt mit $\sqrt{3}$, oder:

Die zusammengehörigen Ordinaten dieser untern Kreisconchoide und des descartischen Foliums verhalten sich: wie die Höhe ps' des gleichseitigen Dreiecks zur halben Grundlinie up.

32) Da sich die untere Kreisconchoide nach Nro. 9 sehr leicht construiren läßt, so ergibt sich hieraus eine neue (einfache) Construction des descartischen Foliums, welches bisher gewöhnlich durch Bestimmung der Ordinaten aus seiner Gleichung construirt wurde.

Da LR : FR = ps' : pu,

so ziehe LW' ⊥ us', dann ist RW' = FR; da sich verhält:

LR : RW' = ps' : pu.

Die Gerade RW' wird also durch die Senkrechte LW' auf die beständige Sehne us' construirt und nach RF getragen, um den zu L gehörigen Punkt F des descartischen Foliums pFs' zu finden.

§. 7. Besondere Punkte der Curve.

33) Für die Curvenpunkte (wie v Fig. 1) über dem Mittelpunkt c der Axe ms, ist das Strahlenstück $n'v = me' =$ der Seite des eingeschriebenen Quadrats $= \frac{c}{2}\sqrt{2}$.

Da nach Nro. 7, pv ∥ me', so ist ∢ cpv = cme' = 45°, und cv = pc, sowie cv = mp, d. h.:

34) Die Ordinaten der Curvenpunkte (wie v) über dem Kreismittelpunkt c sind = ihrer Entfernung vom Pol und ihr Polwinkel ist = 45°.

Der Unterschied der Curven- und Kreisordinate des Mittelpunkts c ist = dem Polperpendikel pm.

Die Ordinate ci' Fig. 1 der Conchoide ist für $x = \frac{c}{2}$ nach deren Gleichung: $Y = \pm \frac{x + a}{x} \sqrt{(c^2 - x^2)}$

$$ci' = \frac{\frac{1}{2}c + a}{\frac{1}{2}c} \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \left(a + \frac{c}{2}\right)\sqrt{3}.$$

Da aber $cv = cp = a + \frac{c}{2}$, so ist $ci' = cv.\sqrt{3}$, $cv^2 = \frac{1}{3} ci^2$; d. h.:

35) Das Quadrat der Ordinate der Kreisconchoide über dem Kreismittelpunkt c ist = dem 3ten Theil des Quadrats der zugehörigen Ordinate der gewöhnlichen Conchoide.

Der Pol $\measuredangle cpi'$ ist hier = 60° und $pi' = 2pc = 2a + c$.

Für den Mittelpunkt c' des unteren Kreises Fig. 1 gibt Gleichung 14 für $x = \frac{c}{2}$:

Ordinate $= \pm\left(\frac{c}{2} - a\right)$ = Abscisse vom Pol; d. h.:

36) Die Ordinate des Punkts der untern Curve über dem Kreismittelpunkt ist = ihrem Abstand vom Pol (also wie in 33).

Im 2ten Fall (für b = a gleichseitige Kreisconchoide) Fig. 2 ist ebenfalls $Ag' = pg'$.

Die untere Curve (Cyssoide) halbirt hier jeden Halbkreis.

Um die 2 Schnittpunkte B und B' (Fig. 1) der untern Curve und des Kreises zu bestimmen, setze $mD = x$, so gibt Gl. 14:

$y^2 = (x - a)^2 \cdot \frac{c - x}{x}$, die Kreisgleichung $y^2 = x(c - x)$

also: $\frac{(x - a)^2}{x} = x$, woraus $x = \frac{a}{2}$ folgt; d. h.:

37) Der offene Theil jeder untern Kreisconchoide schneidet den Kreis in 2 Punkten B und B', deren Ordinaten den Polabstand pm halbiren. Ebenso im 2ten und 3ten Fall. Fig. 2 und 4.

Für die größte Ordinate uF der Ovale in Fig. 1 muß $\frac{dy}{dx} = 0$ sein; daher aus Gleichung 14:

$$\frac{dy}{dx} = (x-a) \cdot \frac{-x-(c-x)}{x^2 \cdot 2\sqrt{\frac{c-x}{x}}} + \sqrt{\frac{c-x}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cx+ac}{2x\sqrt{cx-x^2}} + \frac{\sqrt{(cx-x^2)}}{x} =$$

38) $$\frac{dy}{dx} = \frac{c(a+x)-2x^2}{2x\sqrt{x(c-x)}}.$$

Für das Maximum von y wird also: $c(a+x)-2x^2=0$, daher $x^2 - \frac{c}{2}x = \frac{ac}{2}$, woraus:

39) $$x = \frac{c}{4} + \sqrt{\left[\left(\frac{c}{4}\right)^2 + \frac{ac}{2}\right]} = \frac{c}{4} + \sqrt{\left[\left(\frac{c}{4}\right)^2 + \frac{b^2}{2}\right]}$$

als Abscisse mF der größten Ordinate folgt. Fig. 1.

Um eine einfache Construction für mF zu erhalten, setze:

$$mF = \frac{c}{4} + \sqrt{\left[\left(\frac{c}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{c}{4} \cdot a + a^2 - a^2\right]} =$$

$$mF = \frac{c}{4} + \sqrt{\left[\left(a+\frac{c}{4}\right)^2 - a^2\right]}.$$

40) Die Construction der Abscisse der größten Ordinate ist also folgende:

Fig. 1. Halbire mc (in E), so ist $mE = \frac{c}{4}$ und $pE = a + \frac{c}{4}$ nach pb getragen, gibt $mb = \sqrt{\left[\left(a+\frac{c}{4}\right)^2 - a^2\right]}$; hieraus wird $mF = mE + mb$.

41) Um den äusserſten Punkt u zu finden, ziehe in F die Kreisordinate FG und den Polstrahl pu zur Sehne mG (Vergleiche Nro. 7 u. f.).

Eine andere Bestimmung der Lage der größten Ordinate des blattförmigen Theils der untern Curve ist folgende:

Da Fig. 1 nach N. 16, $z = pu = c\,Cos\varphi - \frac{a}{Cos\varphi}$, wo $\measuredangle upx = \varphi$ und $uF = y = zSin\varphi = cSin\varphi\,Cos\varphi - \frac{aSin\varphi}{Cos\varphi}$, daher $y = \frac{c}{2}\,Sin\,2\varphi - a\,tg\varphi$; so ist:

$$\frac{dy}{d\varphi} = c\,.\,Cos2\varphi - \frac{a}{Cos^2\varphi} = cCos2\varphi - \frac{2a}{1 + Cos2\varphi}.$$

Für das Maximum wird dieser Ausdruck = o; also:

$$cCos2\varphi = \frac{2a}{1 + Cos2\varphi};\ \text{woraus:}$$

$$Cos2\varphi = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2a}{c}};$$

$$\text{Daher } \frac{c}{2}\,Cos2\varphi = -\frac{c}{4} + \sqrt{\left[\left(\frac{c}{4}\right)^2 + \frac{b^2}{2}\right]}.$$

Da nun für $\measuredangle upF = \varphi$ auch $\measuredangle GmF = \varphi$, folglich der Mittelpunkt $\measuredangle Gc'F = 2\varphi$ (wenn c' der Kreismittelpunkt); so ist:

$\frac{c}{2}\,Cos2\varphi = Gc'\,.\,CosGg'F = c'F$. Hieraus folgt:

42) Die Entfernung c'F der größten Ordinate vom Mittelpunkt c' der Axe ist:

$$c'F = -\frac{c}{4} + \sqrt{\left[\left(\frac{c}{4}\right)^2 + \frac{b^2}{2}\right]}.$$

Dieses Resultat stimmt mit No. 39 überein, da wieder

$mF = \frac{c}{2} + c'F = \frac{c}{4} + \sqrt{\left[\left(\frac{c}{4}\right)^2 + \frac{b^2}{2}\right]}$ folgt.

Durch Substitution dieses Werths von mF in Gleichung 14 ist:

$$uF = \left[\frac{c}{4} - a + \sqrt{\left(\frac{c^2}{16} + \frac{b^2}{2}\right)}\right]\sqrt{\frac{\frac{3c}{4} - \sqrt{\left(\frac{c^2}{16} + \frac{b^2}{2}\right)}}{\frac{c}{4} + \sqrt{\left(\frac{c^2}{16} + \frac{b^2}{2}\right)}}}$$

Im 2ten Faktor mit $\frac{c}{4} - \sqrt{\left(\frac{c^2}{16} + \frac{b^2}{2}\right)}$ multiplicirt, gibt:

43) $uF = \frac{c - 4a + \sqrt{(c^2 + 8b^2)}}{4b\sqrt{2}}\sqrt{[c\sqrt{(c^2 + 8b^2)} - c^2 - 2b^2]}$

als Werth der größten Ordinate der Ovale.

44) Für $c = 2a$, oder $b^2 = 2a^2$ fällt der Pol p in den Mittelpunkt und der Werth von pF in Nro. 42 wird dann $= \frac{a}{2}(-1+\sqrt{5})$ d. h.:

Die Entfernung der größten Ordinate vom Pol ist = der Seite des regelmäßigen Zehnecks im Kreis (Siehe harmonische Curve).

Die größte Ordinate wird hier $= \frac{a}{2}\sqrt{(10\sqrt{5}-22)}$.

45) Wenn $b = 2a$, also $c = 4a$ ist, so wird die Entfernung der größten Ordinate vom Pol nach Nro. 39 in Fig. 3:

$pR = mR + a = a\sqrt{3}$, d. h.:

= der Seite des regelmäßigen Dreiecks in einem Kreis, der mit dem Polperpendikel beschrieben wird.

Zieht man bei diesem speciellen Fall, wo also $ps' = 3pm$ ist (Fig. 3), die Kreisordinate pu des Pols p, so ist:

$pu = \sqrt{pm \cdot ps'} = a\sqrt{3}$; also $pR = pu$, daher der Satz.

46) Für die Annahme $b = 2a$ ist die Entfernung der größten Ordinate der Ovale vom Pol = der Kreisordinate des Pols.

Die größte Ordinate wird hier $= a\sqrt{3(2\sqrt{3}-3)}$.

Die letzten zwei Sätze folgen auch unmittelbar aus den in §. 6 gegebenen Sätzen für das descartische Folium.

Da für den vorliegenden Fall ($c = 4a$) in Fig. 3 die Linie $ps' = 3a$ wird, welche dort $= b'$ gesetzt ist, also $b' = 3a$; so gibt §. 6, δ, die Abscisse der größten Ordinate des Foliums $= a\sqrt{3}$ und (δ) diese Ordinate selbst $= a\sqrt{(2\sqrt{3}-3)}$.

Nach §. 6 Satz 31 muß aber die größte Ordinate der unteren Kreisconchoide (welche mit der des Foliums die nämliche Abscisse $a\sqrt{3}$ hat) = der größten Ordinate des Foliums mal $\sqrt{3}$ sein, also $= a\sqrt{3}[2\sqrt{3}-3]$ wie in Satz 46.

§. 8. Bestimmung der Tangenten. Fig. 3.

Wenn x die Abscisse von m aus bezeichnet, so geben die Gleichungen 13 und 14 die allgemeine Gleichung für beide Curvenäste:

$$y^2 = \frac{(x \pm a)^2 (c - x)}{x},$$

wo das Zeichen + für die obere, und — für die untere gilt. Hieraus folgt:

47) $y^2 = \pm 2ac - a^2 + (c \mp 2a)\, x + \frac{a^2 c}{x} - x^2,$

daher $2ydy = (c \mp 2a)\, dx - \frac{a^2 c\, dx}{x^2} - 2x\, dx$ und:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a^2 c + (c \mp 2a)\, x^2 - 2x^3}{2x^2 y}$$

$$= \frac{c\,(x^2 - a^2) - 2\,(x \pm a)\, x^2}{2x\,(x \pm a)\,\sqrt{(cx - x^2)}} = \frac{c\,(x \mp a) - 2x^2}{2x\,\sqrt{(cx - x^2)}},$$ d. h.:

48) Die Tangente des Winkels t (Fig. 3), welchen eine Berührungslinie ft mit der Axe ss' bildet, ist:

$$\text{tgt } t = \frac{\frac{1}{2}c\,(x \mp a) - x^2}{x\,\sqrt{(cx - x^2)}},$$

für Abscissen von m aus; das obere Zeichen gilt für die obere, und das untere Zeichen für die untere Curve (also für $\measuredangle t'$).

Vergleiche damit Nro. 38 in Bezug auf die untere Curve.

Die Länge der Subnormale = y tgt t, wird also:

$$(x \pm a)\sqrt{\frac{c-x}{x}} \cdot \frac{c\,(x \mp a) - 2x^2}{2x\,\sqrt{(cx - x^2)}} = \frac{c}{2x^2}(x^2 - a^2) - (x \pm a)$$

49) Subnormale $= (x \pm a)\left[\frac{c}{2x^2}(x \mp a) - 1\right].$

Ebenso folgt die Länge gt aus $\frac{y}{\text{tgt } t}$, u. s. w.; d. h.:

50) Subtangente $\text{gt} = \frac{x\,(c - x)\,(x \pm a)}{\frac{1}{2}c\,(x \mp a) - x^2}.$

51) Normale $= (x \pm a)\,\frac{c}{2x}\sqrt{\left[\left(1 \mp \frac{a}{x}\right)^2 \pm \frac{4a}{c}\right]}$, u. s. w.

Zur Bestimmung des $\measuredangle$, den eine Berührungslinie mit dem Polstrahl des Berührungspunkts bildet, ist für den Pol $\measuredangle \varphi$ und den Strahl (pf oder pf') = z:

$$\text{tgt } \text{tfp} = z\,\frac{d\varphi}{dz}.$$

Nach Nro. 15 und 16 ist: $z = c\text{Cos}\varphi \pm \frac{a}{\text{Cos}\varphi}$;

Daher: $\frac{dz}{d\varphi} = -c\mathrm{Sin}\varphi \pm \frac{a\mathrm{Sin}\varphi}{\mathrm{Cos}^2\varphi}$

$\mathrm{tgt}\,\mathrm{tfp} = z \cdot \frac{\mathrm{Cos}^2\varphi}{\mathrm{Sin}\varphi\,[\pm a - c\mathrm{Cos}^2\varphi]} = \frac{z\mathrm{Cos}\varphi}{\mathrm{tgt}\varphi\,(\pm a - c\mathrm{Cos}^2\varphi)}$

$c\mathrm{Cos}\varphi = \mathrm{sm}$. $\mathrm{Cos}\,\mathrm{smd} = \mathrm{dm}$, $c\mathrm{Cos}^2\varphi = \mathrm{dm}$. $\mathrm{Cos}\,\mathrm{dmg} = x$,
$z\mathrm{Cos}\varphi = \mathrm{pg}$ oder $\mathrm{pg}' = x' =$ Abscisse von p aus; mithin:

$\mathrm{tgt}\,\mathrm{tfp} = \frac{x'}{\mathrm{tgt}\varphi\,(\pm a - x)}$ und da $\mathrm{tgt}\varphi = \frac{y}{x}$,

$\mathrm{tgt}\,\mathrm{tfp} = \frac{-x'^2}{y\,(x \mp a)}$, und $\mathrm{tgt}\,\mathrm{tfp} = -\mathrm{tgtw}$, gibt:

52) $\mathrm{tgtw} = \frac{x'^2}{y\,(x \mp a)}$.

Für Punkt f ist $x'^2 = \mathrm{pg}^2$, $x - a = \mathrm{pg}'$, $x + a = \mathrm{pg}$, also:

53) $\mathrm{tgtw} = \frac{\mathrm{pg}^2}{\mathrm{fg} \cdot \mathrm{pg}'}$ und ebenso $\mathrm{tgtw}' = \frac{\mathrm{pg}'^2}{\mathrm{f'g}' \cdot \mathrm{pg}}$.

Trägt man also in Fig. 3 pg' nach fq, und errichtet $\mathrm{pe} \perp \mathrm{pf}$, so folgt $\mathrm{ge} = \frac{\mathrm{pg}^2}{\mathrm{fg}}$. Dieses ge in $\mathrm{q}\perp$ nach qo getragen, so ist:

$$\frac{\mathrm{qo}}{\mathrm{fq}} = \frac{\mathrm{pg}^2}{\mathrm{fg} \cdot \mathrm{fq}} = \frac{\mathrm{pg}^2}{\mathrm{fg} \cdot \mathrm{pg}'} = \mathrm{tgtw}.$$

Ebenso wird pg nach f'r getragen, rl so wie $\mathrm{pl}' \perp \mathrm{pf}'$ errichtet, und die Senkrechte $\mathrm{rl} = \mathrm{g'l}'$ aufgetragen; so gibt lf' die Tangente des Punkts f.

Da $\mathrm{l'g}' = \frac{\mathrm{pg}'^2}{\mathrm{f'g}'}$, also auch $\mathrm{rl} = \frac{\mathrm{pg}'^2}{\mathrm{f'g}'}$ und

$\frac{\mathrm{rl}}{\mathrm{rf}'} = \frac{\mathrm{pg}'^2}{\mathrm{f'g}' \cdot \mathrm{pg}} = \mathrm{tgtw}'$ ist.

54) Die Construction einer Berührungslinie ist daher folgende; z. B. für Punkt f, Fig. 3:

Man trägt die Polabscisse pg des zu demselben Strahl gehörigen Punkts f' des andern Curvenast's vom Berührungspunkt aus gegen den Pol zu auf den Strahl, und errichtet in dem Endpunkt q auf diesen Strahl eine Senkrechte qo; alsdann zieht man im Pol auf den Strahl eine 2te Senk-

rechte pe bis zum Schnitt mit der verlängerten Ordinate des Berührungspunkts, und trägt diese Verlängerung ge auf die 1te Senkrechte (nach qo).

Die Verbindungslinie des Endpunkts dieser Senkrechten mit dem Berührungspunkt ist dann die Tangente of.

Wenn der Punkt f über dem Mittelpunkt des Kreises liegt, so ist in Nro. 53 und nach Nro. 33 und 36:

$$fg = pg; \text{ und } f'g' = pg', \text{ also:}$$

$$\text{tgtw} = \frac{pg^2}{pg \cdot pg'} = \frac{pg}{pg'}, \text{ und:}$$

$$\text{tgtw}' = \frac{pg'^2}{pg' \cdot pg} = \frac{pg'}{pg},$$

also $\text{tgtw}' = \frac{1}{\text{tgtw}} = \text{Cotgtw}$; daher $w' + w = 90$, d. h.:

55) Die beiden Winkel, welche die Tangenten der Curvenpunkte über den Kreismittelpunkten mit ihrem Polstrahl bilden, sind Complementwinkel.

Für den Kreuzungspunkt p (Fig. 3) gibt Formel 48, da hier $x = a$ ist, den $\sphericalangle$ der Berührungslinie pk:

$$\text{tgt mpk} = \frac{\frac{1}{2}c \cdot 2a - a^2}{a\sqrt{(ac - a^2)}} = \frac{ac - a^2}{a\sqrt{(ac - a^2)}} = \frac{1}{a}\sqrt{b^2 - a^2}$$

daher muß $pk = b$ werden, da $\text{tgtmpk} = \frac{mk}{pm} = \frac{mk}{a}$ d. h.:

56) Wenn der Parameter vom Pol aus nach der Leitlinie getragen wird (nach pk), so erhält man die Berührungslinie des Kreuzungspunkts (Pols p).

57) Wird $b = a$ (wie in Fig. 2), wo die untere Curve eine Cyssoide ist, so fällt die Tangente mit pm zusammen, d. h. die Axe pm ist die gemeinschaftliche Tangente der 2 Curvenhälften in der Spitze p.

58) Wenn $b = 2a$ (siehe Nro. 45), so ist Fig. 3 $pk = 2pm$, also $\sphericalangle \text{mpk} = 60°$, die Tangenten im Pol bilden also mit der Axe zwei Winkel von 60°.

59) Wird aber $b^2 = 2a^2$, wie bei der harmonischen Curve (siehe N. 44) so ist $\text{tgt} = \frac{a}{a} = 1$; d. h.: die

Winkel, welche die Poltangenten mit der Axe bilden, sind $= 45°$.

Die beiden Tangenten im Kreuzungspunkt p stehen dann auf einander senkrecht.

Anmerkung. Ueber einfachere Constructionen der Tangente (wenn $c = 2a$) und einige hierhergehörige Sätze siehe die Abhandlung über die harmonische Curve.

§. 9. Krümmungshalbmesser der Curve.

Wenn $\frac{dy}{dx} = q$, und der Krümmungshalbmesser $= \rho$, so ist:

$$\rho = \frac{dx\,(1+q^2)^{\frac{1}{2}}}{dq}.$$

Da nach Nro. 48 der Werth tgtt oder q

$$q = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}c\,(x \mp a) - x^2}{x\sqrt{(cx - x^2)}} \text{ ist, so folgt:}$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{x\sqrt{(cx-x^2)}\,[\frac{1}{2}c-2x] - [\frac{1}{2}c(x\mp a)-x^2]\left[\sqrt{cx-x^2} + \frac{x\,(c-2x)}{2\sqrt{(cx-x^2)}}\right]}{x^2\,(cx-x^2)}$$

$$= \frac{2x^2\,(c-x)\,(\frac{1}{2}c-2x) - (\frac{1}{2}cx \mp \frac{1}{2}ac - x^2)\,.\,x\,(3c-4x)}{2x^2\,(c-x)\,\sqrt{(cx-x^2)}}$$

$$= \frac{2x\,(c-x)\,(c-4x) - (cx \mp ac - 2x^2)\,(3c-4x)}{4x^2\,(c-x)\,\sqrt{(cx-x^2)}}$$

$$60)\ \frac{dq}{dx} = \frac{c\,(\pm 3ac \mp 4ax - cx)}{4x^2\,(c-x)\sqrt{(cx-x^2)}};\ \text{mithin:}$$

$$\rho = \pm\frac{4x^2\,(c-x)\sqrt{(cx-x^2)}}{c\,(\pm 3ac \mp 4ax - cx)}\left[1 + \frac{\left(\frac{1}{2}cx \mp \frac{ac}{2} - x^2\right)^2}{x^2\,(c-x)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho = \frac{4x^2\,(c-x)\sqrt{x(c-x)}}{c\,(\pm 3ac \mp 4ax - cx)} + \frac{c^{\frac{1}{2}}\,(cx^2 \mp 2acx + a^2c \pm 4ax^2)^{\frac{1}{2}}}{8x^2\,(c-x)\sqrt{x\,(c-x)}}$$

$$61)\ \rho = \frac{1}{8}\sqrt{c}\,.\,\frac{[c\,(x \mp a)^2 \pm 4ax^2]^{\frac{1}{2}}}{x^2\,(\pm 3ac \mp 4ax - cx)}$$

gibt die Größe des Krümmungshalbmessers der Curve.

Für $x = c$, also für die Scheitel s und s' Fig. 1, folgt die Länge von ρ:

$$\rho = \mp\frac{1}{2}\sqrt{c}\,.\,\frac{(a^2c \pm 2ac^2 + c^3)^{\frac{1}{2}}}{c^2\,(\mp ac - c^2)} = \frac{(c^2 \pm 2ac + a^2)^{\frac{1}{2}}}{-2c\,(c \pm a)} =$$

$\rho = -\frac{(c \pm a)^2}{2c\,(c \pm a)} = -\frac{(c \pm a)^2}{2c}$, d. h.:

Für s ist $\rho = \frac{ps^2}{ss'}$, für s' ist $\rho = \frac{ps'^2}{ss'}$, oder:

62) **Der Krümmungshalbmesser jedes Scheitels ist also = dem Quadrat der Entfernung des Scheitels vom Pol getheilt durch die doppelte Axe (oder ss').**

Derselbe kann also durch die Construction der 3ten Proportionalen zu ss' und ps (oder ps') gefunden werden.

Für b = a, also auch c = a folgt $\rho = 2a$ und $\rho = o$, d. h.:

63) Für den Punkt s (Fig. 2) ist der Pol p der Krümmungsmittelpunkt der zur Cyssoide gehörigen oberen Curve, und im Pol ist die Krümmung der Cyssoide größer als an jedem endlichen Kreis.

Wenn c = 2a, wie bei dem Fall, wenn die untere Curve die harmonische Curve ist, so wird in s' (Fig. 1, wenn ps' = pm)

$\rho' = \frac{a}{4} = \frac{1}{4}\,ps.$

Im Pol selbst ist x = a, also nach Nro. 61:

$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{c} \cdot \frac{(4a^2c - 4a^3)^{\frac{3}{2}}}{a^2\,(4a^2 - 4ac)} = \frac{1}{2}\sqrt{c} \cdot \frac{8a^3\,(c-a)^{\frac{3}{2}}}{4a^3\,(c-a)}$

$\rho = \sqrt{c}\,(c - a).$

Zieht man in p Fig. 3 die Senkrechte pu auf ps', so ist:

$us' = \sqrt{ms'} \cdot ps' = \sqrt{c}\,(c - a) = \rho$, d. h.:

64) **Der Krümmungshalbmesser am Kreuzungspunkt p (Fig. 3) ist = der Kreissehne us', welche über dem Abstand dieses Punkts vom Scheitel s' liegt.**

Zieht man also pv ⊥ pk (wo pk = b siehe 56) und nimmt pv = us', so ist v der Krümmungsmittelpunkt der Curve in p.

Da ferner $\sin k = \frac{mp}{pk} = \frac{a}{b}$ und:

$\sin us'p = \frac{up}{us'} = \sqrt{\frac{a}{c}\,\frac{(c-a)}{(c-a)}} = \sqrt{\frac{a}{c}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$,

so ist $\measuredangle$ us'p = $\measuredangle$ k = $\measuredangle$ Apu.

Daher ist Ak ⊥ us', und pv ∥ us', so wie s'v ⊥ up.

65) Der Krümmungsmittelpunkt der Curve im Pol liegt also senkrecht über dem Scheitel s' in einer Entfernung s'v = der Kreisordinate des Pols.

Für die Punkte (v) in Fig. 1 über den Mittelpunkten c und c' der Kreise ist $x = \frac{c}{2}$, also nach Nro. 61:

$$\varrho = \tfrac{1}{4}Vc \cdot \frac{\left(a^2c + \frac{c^3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}c^2\left(\pm ac - \frac{c^2}{2}\right)} = \frac{\left[a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{c}{2}\left(\frac{c}{2} \mp a\right)}.$$

Nimmt man (in Fig. 1) $mb = \frac{ms}{2} = \frac{c'}{2} = mc$, so ist: $pb^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$, $\frac{c}{2} - a = pc'$, $\frac{c}{2} + a = pc$; daher die beiden Sätze:

66) Im Punkt v über dem Mittelpunkt c ist der Krümmungshalbmesser $= \frac{pb^3}{mc \cdot pc'}$, und

67) In den Punkten w' über dem Mittelpunkt c (Fig. 3) ist der Krümmungshalbmesser $= \frac{pk^3}{mc \cdot pC}$, wenn $mk = \frac{c}{2}$.

Aus diesen 2 Formeln ergibt sich ferner das Verhältniß der Krümmung in den Punkten P und w' Fig. 3 $= \frac{1}{pc} : \frac{1}{pC}$ $= pC : pc$, d. h.:

68) Die Krümmungshalbmesser in den 2 Punkten über den Kreismittelpunkten verhalten sich wie die Entfernungen der zugehörigen Ordinaten vom Pol, oder wie ihre Polstrahlen.

Anmerkung. Die Richtung der Krümmungshalbmesser für diese Punkte folgt aus der Lage der Tangenten, siehe N. 54 und 55.

69) Aus Satz 68 folgt für die Punkte A und v (Fig. 2) der gleichseitigen unteren (Cyssoide) und der oberen Kreisconchoide (für c = a, also b = a), daß der

Krümmungshalbmesser für den Punkt v über dem Mittelpunkt c dreimal so groß ist als der für den Punkt A, da cp = 3pg'.

Diese Krümmungshalbmesser sind $= \frac{5}{2} a\sqrt{5} = 5qg'$ und $= \frac{5}{6} a\sqrt{5} = \frac{5}{3} qg'$; da $qg' = \sqrt{\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ ist.

§. 10. Wendepunkt der oberen Curve.

Der 2te Differentialquotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder $d\left(\frac{dy}{dx}\right) : dx$, oder $\frac{dq}{dx}$ ist in Nro. 60 gegeben.

Dieser wird = o für den Werth:

$c(3ac - 4ax - cx) = o$, woraus:

70) Die Abscisse x des Wendepunkts (wie ! in Fig. 1) ist $x = \frac{3ac}{4a+c}$ oder $= \frac{3b^2}{4a+c}$.

71) Für die obere (gleichseitige) Kreisconchoide folgt Fig. 2:

Die Abscisse mh des Wendepunkts $f = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}ms$.

72) Für die obere Kreisconchoide, welche zur harmonischen Curve gehört, ist $c = 2a$ ($b^2 = 2a^2$); also:

Die Abscisse des Wendepunkts $= a = \frac{c}{2}$.

Wenn also in Fig. 1, ms = 2mp oder mc = mp, so liegt der Wendepunkt v über dem Kreismittelpunkt.

Der Krümmungshalbmesser an diesem Punkt folgt aus N. 61 für $c = 2a$ und $x = a$, $\rho = \infty$, d. h.:

73) Bei der oberen Kreisconchoide, welche als untere Curve die harmonische hat, ist der Krümmungshalbmesser für den Wendepunkt (wie v Fig. 1) größer, die Krümmung also kleiner als an jedem endlichen Kreis.

Dieß folgt auch aus Nro. 66, weil dort in diesem Fall pq' (Fig. 1) oder die Entfernung des Pols vom unteren Kreismittelpunkt = o wird.

§. 11. Anwendung der Kreisconchoide als geometrischer Ort und andere Definitionen derselben.

Aus der in §. 1 gegebenen Entstehung der Curve und durch Anwendung der in den vorigen §§. abgeleiteten Sätze ergeben sich noch andere Eigenschaften und Anwendungen dieser krummen Linie bei Constructionen. Z. B.:

74) Zeichnet man alle rechtwinkligen Dreiecke, wie pqs, pbo u. s. w. (Fig. 1), von gleicher Höhe = b, deren Fußpunkte in eine feste Gerade JJ' fallen, und von denen ein Endpunkt der Hypotenuse in einem festen Punkt p liegt, so ist der Ort des andern Endpunkts der Hypotenuse die obere Kreisconchoide; denn fr. $pn = on^2 = b^2$.

75) Wenn alle rechtwinkligen Dreiecke, wie pNP (Fig. 1), gezeichnet werden, von denen der eine Endpunkt der Hypotenuse in den festen Punkt p, der andere in die feste Gerade JJ' fällt, und die eine gleiche Kathete NP (= b) haben; so ist der Ast wBp der unteren Kreisconchoide der Ort der Fußpunkte aller Höhen (wie Pw) dieser Dreiecke; da $Np \cdot Nw = NP^2 = b^2$.

76) Zeichnet man aber alle rechtwinkligen Dreiecke, wie bQu (Fig. 1), von welchen der Fußpunkt der Höhe in einen festen Punkt p, der eine Endpunkt der Hypotenuse in eine feste Gerade JJ' fällt, und die eine gleiche Kathete (bQ = b) haben, so liegt der andere Endpunkt der Hypotenuse in dem geschlossenen Theil (in der Ovale) der untern Kreisconchoide. Da $pb' \cdot ub' = b'Q^2 = b^2$ ist.

77) Die Verwandlung eines Quadrats in alle möglichen Rechtecke, durch Zeichnung der Curve, wurde schon in §. 4, Ende von Nro. 21 erwähnt; von einer großen Zahl von andern Constructionsaufgaben sollen hier nur einige angeführt werden:

78) Von einem Dreieck sRp (Fig. 1) ist eine Seite pR und die Länge der Ecktransversale sq gegeben, welche die Gegenseite pR in 2 Abschnitte theilt, deren Rechteck (= b^2) gegeben ist, das Dreieck zu construiren.

Trage ps auf, beſchreibe darüber einen Halbkreis und trage b als Ordinate in dieſen (z. B. = mq), ſo folgt der Polabſtand pm und die Axe ms, aus welchen nach Nro. 9 die obere Curve svJ' gezeichnet wird; durch Abtragen der gegebenen Transverſale sq ergibt ſich dann der Punkt q und die Seite pR gibt das △psR.

79) Eine gegebene Gerade (= pf' Fig. 2) ſoll ſo verlängert werden, daß das Rechteck aus der ganzen Linie und der Verlängerung = einem gegebenen Quadrat (= a^2) iſt.

Zeichne zu a als Parameter mp die untere gleichſeitige Curve (Cyſſoide) und trage pf' = der gegebenen Geraden auf, ſo iſt f'n die geſuchte Verlängerung.

80) Von einem Viereck msvn' (Fig. 1), welches in m einen rechten Winkel hat, iſt die Seite ms, ihre Verlängerung mp bis zum Schnitt mit der Gegenſeite, die Länge der Seite sv und die Bedingung gegeben: daß die 1te Seite sm zu ihrer Gegenſeite n'v in verkehrter Proportion ſtehen ſoll mit ihren Verlängerungen, das Viereck zu zeichnen.

Aus ms = c und pm = a zeichne die obere Kreisconchoide (nach Nro. 9) und trage sv als Sehne auf, ſo gibt pv das Viereck msvn'; da nun

$$ms \cdot pm = b^2 \text{ und } n'v \cdot pn' = b^2 = ms \cdot pm \text{ oder:}$$
$$n'v : ms = pm : pn'.$$

81) Von einem Viereck n'vRq (Fig. 1) iſt die Seite n'q, der ∢ n', der Abſtand pm des Schnittpunkts p der 2 anliegenden Seiten, und die Bedingung gegeben: daß die Rechtecke gebildet aus dieſen zwei Seiten und ihren Verlängerungen bis zum Schnitt gleich einem gegebenen Quadrat (b^2) ſein ſollen.

Conſtruire aus pm und b = mq die Axe ms und die obere Curve, ziehe pn' unter dem gegebenen ∢ n' und trage die gegebene Seite nach n'q, ſo folgen die Seiten n'v und qR durch die Strahlen bis zur Curve.

82) Ein Viereck unb'f' (Fig. 1) zu zeichnen, von welchem folgende Theile gegeben ſind:

Der Abstand pm des Schnittpunkts der Diagonalen von einer Seite, der ∢ J', welchen diese mit der Gegenseite uf' bildet, die Entfernung J'm des Schnittpunkts J' vom Fußpunkt m und die Bedingung: daß jede Diagonale mit ihrem an der 1ten Seite liegenden Abschnitt ein gegebenes Rechteck = b^2 bilden soll.

Nachdem aus pm = a und aus b die untere Kreisconchoide construirt ist, wird die gegebene m J' und in J' der gegebene ∢ J' aufgetragen, so bestimmt J'u im Schnitt mit der Curve die Punkte u und f', deren Polstrahlen dann die beiden Ecken b' und n und dadurch das Viereck unb'f' geben.

83) Fig. 2. Wenn man alle Strahlen wie pu, die von einem festen Punkt p nach einer Geraden BC gezogen sind, in 2 Abschnitte theilt, deren Quadrate um das Quadrat des Abstands ps des festen Punkts an der Geraden differiren ($pf^2 - uf^2$ oder $uf'^2 - f'p^2 = ps^2$), so liegen alle Theilungspunkte in der oberen und unteren gleichseitigen Kreis-Conchoide.

Vergleiche Nro. 23.

Hiernach lassen sich unter anderen folgende Aufgaben lösen:

84) Von einem rechtwinkligen Dreieck psu (Fig. 2) ist die eine Kathete ps und die Länge der Transversale fs gegeben, welche die Hypotenuse in 2 Abschnitte theilt, deren Differenz der Quadrate = dem Quadrat der gegebenen Kathete ist.

Aus ps bestimmt man durch pm = ½ps u. s. w. die Curve, in welche die Transversale sf als Scheitelsehne eingetragen wird. Der Punkt f gibt dann die Hypotenuse pu.

85) Vom einen Endpunkt p (Fig. 2) des Durchmessers eines Kreises sKp soll eine solche Secante nach der Tangente BC des andern Endpunkts gezogen werden, daß der Unterschied der Quadrate des äusseren Stücks und der Sehne gleich dem Quadrat des Durchmessers wird.

Nehme pm = ¼ps und construire die untere Curve, so gibt diese in den Schnittpunkten (wie K) die Sehne pK, welche dann bis zum Schnitt mit BC verlängert wird.

86) Fig. 2. Eine beliebige Curve DfqE, eine Gerade BC und ein Punkt p liegen in einer Ebene.

Von dem Punkt p aus solche Gerade durch die Curve nach BC zu ziehen: daß die Quadrate der Stücke, in welche diese Geraden durch die Curve getheilt werden, gleich dem Quadrat des Abstands ps des Punkts von der gegebenen Geraden sind.

Zu pm = ms zeichnet man die gleichseitige Kreisconchoide (beide Aeste). Die Schnittpunkte derselben mit der gegebenen krummen Linie (f und E) bestimmen dann die Punkte, durch welche die Geraden von p aus zu ziehen sind ($pf^2 - uf^2 = ps^2$).

Da in der gleichseitigen Kreisconchoide Fig. 2

$pf^2 - uf^2 = ps^2$, also $(pf + uf)(pf - uf) = ps^2$,

so folgt, wenn im 2ten Faktor statt uf die gleiche pf' gesetzt wird:

$$pu \cdot ff' = ps^2,$$

Dasselbe folgt auch aus: $pn \cdot nf' = pm^2$ (Definition); also:

$2pn \cdot 2nf' = 4pm^2 = ps^2$; oder $pu \cdot ff' = ps^2$,

Daraus der Satz:

87) Wenn alle Strahlen von einem festen Punkt p nach einer Geraden BC gezogen werden, so schneiden die 2 Curvenäste der gleichseitigen Kreisconchoide auf diesen Strahlen je zwei gleichweit von den Endpunkten entfernte Stücke von der Beschaffenheit ab, daß das Rechteck aus dem ganzen Strahl und dem inneren Stück (ff') = dem Quadrat des Abstands ps des festen Punkts von der Geraden ist.

Diese Rechtecke sind also alle gleich.

Hieraus ergibt sich die Lösung folgender Aufgabe:

88) Auf einer Geraden von der Länge L zwei gleichweit von den Endpunkten entfernte Punkte so zu bestimmen: daß das Rechteck aus L und dem inneren Stück = einem gegebenen Quadrat ist

Man zeichnet zu der Seite des gegebenen Quadrats als ps Fig. 2 die 2 Curven und trägt dann die gegebene L als

Polstrahl (z. B. nach pu), so bestimmen die Curven die 2 Punkte f und f'.

89) Wenn man den Abstand ps (Fig. 2) nach pv' als Sehne der unteren Curve einträgt und die Gerade pv' bis zum Schnitt mit BO verlängert, so wird der ganze Strahl von den beiden Curvenästen so harmonisch getheilt, daß die 2 äusseren Abschnitte gleich sind; da jetzt das Produkt des ganzen Strahls und des inneren Stücks = dem Produkt der 2 äusseren Stücke ist.

Anmerkung. Eine größere Zahl von Constructionen und Sätzen über harmonische Theilung sind für die harmonische Curve (c = 2a) in der schon mehrfach citirten Abhandlung gegeben.

§. 12. Anwendung der unteren Kreisconchoide zur Lösung cubischer Gleichungen.

Wenn die Gleichung für die untere Kreisconchoide (Nr. 18) für Abscissen = x vom Pol p aus (auf der Axe ps' Fig. 1):

$$y = \pm x\sqrt{\frac{c - a - x}{x + a}}$$

nach Potenzen von x geordnet wird, so folgt:

91) $x^3 - (c - a)x^2 + y^2 x + ay^2 = 0$.

Es können also alle Gleichungen von den Formen:

a) $x^3 - Ax^2 + Bx + C = 0$,

b) $x^3 + Bx + C = 0$

und da durch Substitution von $x = -x'$ in diese

c) $x'^3 + Ax'^2 + Bx' - C = 0$ und

d) $x'^3 + Bx' - C = 0$ entstehen; die Wurzeln dieser 4 Formen durch Construktion der unteren Kreisconchoide gefunden werden.

Man hat nämlich in der Form a: $B = y^2$, $C = ay^2$, also $a = \frac{C}{y^2} = \frac{C}{B}$ und $c - a = A$, also $c = \frac{C}{B} + A$ zu nehmen.

Bei der Form c) wird statt x zuerst Werth $= x'$ gesetzt und dann wie bei a verfahren.

Bei b) und d) wie bei a) und c), nur ist hier die Axe

c = dem Polabstand a zu nehmen, da A oder c — a hier = o ist (Cyssoide).

Z. B. 92) $x^3 - 7x^2 + 5x + 10 = o$.

Verglichen mit N. 91 gibt:

$y^2 = 5$, also $a \cdot 5 = 10$, $a = 2$, und $c - a = 7$, $c = 9$.

Man nimmt nun nach irgend einem Maaßstab (in Fig. 3) pm = 2, ms = 9; und construirt dazu die untere Curve nach Nro. 9.

Alsdann wird $y = \sqrt{5}$ durch $\sqrt{(2^2 + 1^2)}$ oder $\sqrt{3^2 - 2^2}$ oder durch die mittlere Proportionale 5 : y = y : 1 construirt, z. B. pD = 3, so ist mD = y (da pm = 2).

Die Parallele DB zur Axe gibt dann im Allgemeinen 3 Schnittpunkte E, F und B, welche die Ordinate $y = \sqrt{5}$ haben, und deren Abscissen:

pa, pg' und pG sind die 3 Werthe von x, welche auf dem angenommenen Maaßstab abgemessen werden. Davon ist pa negativ und die beiden andern sind positiv.

Man findet pg' = + 2, pG = + 5,854... und pa = — 0'854... als die drei Wurzeln der Gleichung.

---

93) $x^3 + 5,6x^2 + 2,5x - 8 = o$, zu construiren.

Setze (wie in Form c) $x = -x'$, so folgt:

$$x'^3 - 5,6\,x'^2 + 2,5\,x' + 8 = o.$$

Hier ist durch Vergleichung mit Nro. 91:

$y^2 = 2,5$; also z. B. $1 : y = y : 2\frac{1}{2}$...

$a = \frac{8}{2,5} = 3,2$ und $c - a = 5,6$; also $c = 8,8$ aufzutragen.

Durch die Parallele im Abstand = y folgen dann wieder 3 Werthe von x' ungefähr = 1,9, = 4,7 und = 0,9...

Die Werthe von x haben aber die entgegengesetzten Zeichen; also ist x = 0,9; = — 1,9 und = — 4,7 (ungefähr).

---

94) Wenn die Parallele DB Fig. 3 den geschlossenen Theil der Curve nicht trifft, (sobald y > als die größte Ordinate ist), so sind 2 Werthe von x imaginär.

95) Berührt aber die Parallele BD die Ovale, so sind zwei Werthe von x gleich groß, nämlich = der Abscisse der größten Ordinate.

Den 3ten Werth von x gibt der offene Theil der untern Curve.

96) Es sei ferner $x^3 + 12x + 92 = 0$.

Hier ist $y^2 = 12$, $3 : y = y : 4$ und $ay^2 = 92$,

$a = \frac{92}{12} = 7\frac{2}{3}$. Die Größe c wird = a, siehe Form b.

In Fig. 2 wird also die untere Curve für $c = a$ (Cyssoide) gezeichnet, wobei $pm = 7\frac{2}{3}$ (siehe Nro. 22); dann mt = y aufgetragen; so gibt tr # mp den Punkt r, dessen Abscisse po ein Werth von x ist. Dieser ist negativ, weil in der allgemeinen Gleichung x von p aus gegen s gerechnet ist (Fig. 1), ($x = -3{,}64$).

Die beiden andern Werthe von x sind imaginär, weil hier die Ovale verschwindet.

Dieß folgt auch aus der Gleichung selbst, da die Glieder x^3 und x, zwischen denen x^2 fehlt, gleiche Zeichen haben.

§. 13. Ableitung des Inhalts der oberen Fläche (durch Integralrechnung).

Da $Inh = \int y\,dx$, und nach Nro. 13:

$y = (x + a)\sqrt{\frac{c - x}{x}}$, für die obere Curve, so ist

$$Inh = \int (x+a)\,.\,dx\sqrt{\frac{c-x}{x}} = \int dx\sqrt{(cx - x^2)} +$$

$$+ a\int \frac{dx}{x}\sqrt{(cx - x^2)}$$

$$Inh = \left(\frac{x}{2} - \frac{c}{4}\right)\sqrt{(cx - x^2)} + \frac{c^2}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{(cx - x^2)}} +$$

$$+ a\left[\sqrt{(cx - x^2)} + \frac{c}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(cx - x^2)}}\right]$$

$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{c}{4} + a\right)\sqrt{(cx - x^2)} + \frac{c}{2}\left(\frac{c}{4} + a\right)\int \frac{dx}{\sqrt{(cx - x^2)}}$$

Das 2te Glied gibt: $\frac{c}{2}\left(\frac{c}{4}+a\right) . 2\,\text{arc}\left(\text{Sin}=\sqrt{\frac{x}{c}}\right)$

97) $\text{Jnh} = \left(\frac{x}{2}-\frac{c}{4}+a\right)\sqrt{(cx-x^2)} + c\left(\frac{c}{4}+a\right) \times \text{arc}\left(\text{Sin}=\sqrt{\frac{x}{c}}\right)$.

Die Constante ist = o, da für x = o auch Jnh = o ist. Eine andere Ableitung durch die Polargleichung (15) $z = c\text{Cos}\varphi + \frac{a}{\text{Cos}\,\varphi}$, für den Pol p, gibt:

$$\text{Jnh} = \frac{1}{2}\int z^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\left(c^2\text{Cos}^2\varphi + 2ac + \frac{a^2}{\text{Cos}^2\varphi}\right) d\varphi$$

$$\text{Jnh} = \frac{c^2}{2}\int\text{Cos}^2\varphi d\varphi + ac\varphi + \frac{a^2}{2}\int\frac{d\varphi}{\text{Cos}^2\varphi} =$$

$$= \frac{c^2}{4}\int(1 + \text{Cos}2\varphi)\, d\varphi + ac\,.\,\varphi + \frac{a^2}{2}\,\text{tgt}\,\varphi$$

$$= \frac{c^2}{4}\varphi + \frac{c^2}{8}\,\text{Sin}\,2\varphi + ac\,.\,\varphi + \frac{a^2}{2}\,\text{tgt}\,\varphi.$$

98) Daher ist der Inhalt eines Sectors (wie pfs Fig. 1):

$$\text{Jnh pfs} = \left(\frac{c^2}{4}+b^2\right)\varphi + \frac{c^2}{4}\,\text{Sin}\,\varphi\text{Cos}\varphi + \frac{a^2}{2}\,\text{tgt}\,\varphi.$$

Da $\frac{a^2}{2}\,\text{tgt}\,\varphi$ (in Fig. 1) $= \frac{1}{2}\,a\,.\,a\,\text{tgt}\varphi = \frac{1}{2}\,mp\,.\,mn =$ = dem Dreieck mnp ist, welches unterhalb der Leitlinie liegt, so folgt durch Subtraction dieses Dreiecks für einen Sector der oberen Fläche:

99) $\text{Jnh}\,.\,\text{fnms} = \left(\frac{c^2}{4}+b^2\right)\varphi + \frac{c^2}{4}\,\text{Sin}\,\varphi\text{Cos}\varphi.$

Zerlegt man diese Formel in:

$$\text{Jnh} = \frac{c}{2}\,.\,2\varphi\,.\,\frac{c}{4} + \frac{1}{2}\,.\,\frac{c}{2}\,.\,\frac{c}{2}\,\text{Sin}\,2\varphi + 2b\,.\,\varphi\,.\,\frac{b}{2}$$

$$\text{Jnh fnms} = cd\,.\,\text{Bogen}\,\measuredangle\,dcs\,.\,\frac{dc}{2} + \frac{1}{2}\,.\,cm\,.\,cd\,\text{Sin}\,dcs +$$

$$+ 2\,.\,on\,.\,\text{Bogen}\,\measuredangle\,\text{on r}\,.\,\frac{on}{2}.$$

Da $\sphericalangle$ onr $= \varphi$ und on $= b$, siehe Construction der Curve, also:

$$\text{fnms} = \text{Bogen dKs} \cdot \frac{dc}{2} + \frac{1}{2}\,\text{cm} \cdot \text{dg} + 2 \cdot \text{or} \cdot \frac{\text{on}}{2}$$

$$= \text{Sector dKsc} + \triangle\,\text{dcm} + 2 \cdot \text{Sector onr},$$

$$= \text{Sector dKsm} + 2 \cdot \text{Sector onr, d. h.:}$$

100) Der Inhalt eines Theils fnms Fig. 1 der oberen Curvenfläche zwischen der Axe ms und dem Polstrahl fn ist = dem am Fußpunkt m liegenden zu demselben Polwinkel gehörigen Kreissector dKsm mehr dem doppelten Sector onr, welcher zu dem gleichen Polwinkel und dem Radius b gehört.

Wenn $\sphericalangle\,\varphi = 90^0$ wird, so entsteht die bis ins Unendliche gehende halbe Fläche Jsm, im Kreis die halbe Kreisfläche, und der Sector Hon wird zu einem Viertelskreis; daher:

101) Der Inhalt der oberen Flächenhälfte Jsm (die bei J bis ins Unendliche geht) ist = dem eingeschriebenen Halbkreis se''m mehr einem mit dem Parameter b beschriebenen Halbkreis oder:

$$\text{Jsm} = \frac{1}{8}\pi c^2 + \frac{1}{2}\pi b^2 = \frac{\pi}{2}\left(b^2 + \frac{c^2}{4}\right), \text{ und:}$$

102) Die Fläche JsdmJ (Fig. 1) zwischen dem Halbkreis se''m, der Curve und der Leitlinie ist = einem mit dem Parameter on beschriebenen Halbkreis ($= \frac{1}{2}\pi b^2$).

103) Fig. 1. Der Inhalt der ganzen oberen (unendlichen) Fläche zwischen Curve und Leitlinie ist = dem eingeschriebenen Kreis sdme' mehr einem Kreis, dessen Radius der Parameter b ist; oder

$$= \pi\left(b^2 + \frac{c^2}{4}\right).$$

Dieser Satz folgt auch aus Nro. 97, wenn $x = ms = c$ gesetzt wird.

Wenn in Fig. 1, $mq = b$, so ist $cq^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$; also:

Inh: $\text{JsJ}' = \pi \cdot cq^2$, d. h.:

104) Der Inhalt der ganzen (unendlichen) oberen Fläche ist = dem eines Kreises, dessen Radius die Verbindungslinie cq des Mittelpunkts mit dem Endpunkt q des Parameter mq ist.

Für den Fall, daß c = a und b = a ist (Fig. 2) wird nach Nro. 104:

Die ganze obere Fläche $= 5\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$, d. h.:

105) Die Fläche der oberen gleichseitigen Kreisconchoide JsJ' (Fig. 2) ist gleich dem fünffachen eingeschriebenen Kreis sm.

Für diejenige obere Kreisconchoide, in welcher $c = 2a$, $b^2 = 2a^2 = \frac{c^2}{2}$ gibt Nro. 103: Inhalt JsJ' Fig. 1, wenn mp = ½ms:

Inhalt $= \frac{\pi c^2}{2} + \frac{\pi c^2}{4} = \frac{3}{4}\pi c^2$ oder $= 3\pi a^2$, d. h.:

106) Die zur harmonischen Curve gehörige Fläche der oberen Kreisconchoide Fig. 1 ist = dem dreifachen eingeschriebenen Kreis sm.

Diese Fläche ist also ebensogroß als der Inhalt einer Cykloide, welche den Kreis sm zum Erzeugungskreis hat.

107) Der Flächentheil (wie se'mJ' Fig. 1, wenn c = 2a zwischen dem Kreis, der Curve und der Leitlinie ist = dem Inhalt des Kreises sm.

Wenn b = 2a (wobei der Winkel der Poltangente Fig. 3 $\sphericalangle$ mpk = 60°; so ist c = 4a, oder $b = \frac{c}{2}$ und N. 103 gibt:

Inhalt $= \pi \frac{c^2}{4} + \frac{\pi c^2}{4} = 2$. Kreisfläche ms, d. h.:

108) Die Fläche der oberen Kreisconchoide, deren Axe ms = dem 4fachen Polabstand pm (wie Fig. 3), ist = dem doppelten eingeschriebenen Kreis ms; oder = dem Halbkreis MsN, dessen Radius die Axe sm ist.

Für diesen Fall (b = 2a oder c = 4a) gelten auch noch folgende Sätze Fig. 3:

109) Der Flächentheil J'Psd'm zwischen dem Halbkreis, der Leitlinie und der Curve ist = dem Halbkreis (= sd'm); oder auch = der 3seitigen Figur md's QN zwischen den Bogen der 2 Kreise.

110) Der Inhalt des unendlichen Flächenstücks J'SN ist = der Fläche sPSQ zwischen der Curve und dem Bogen Q des großen Kreises.

§. 14. Elementare Ableitung des Inhalts der oberen Fläche. Fig. 2.

Nach §. 3 Nro. 20 ist für irgend eine obere Kreisconchoide Jfs, die Summe je zweier gleichweit vom Mittelpunkt c entfernten Parallelen:

$$gd + JN = \frac{b^2}{dl}; \text{ (wenn } cl' = cl)$$

Nimmt man nun lh = l'h' unendlich klein an, so entstehen durch fw und kn' ∥ cv zwei Flächenelemente (die in der Figur schraffirt sind), von unendlich kleiner Höhe de, deren Summe:

$$\text{Inhalt } (gw + kN) = \frac{b^2 \cdot de}{dl}.$$

Es verhält sich aber in den ähnlichen Dreiecken wde und dlc (deren Seiten paarweise ⊥ sind):

$$de : dl = dw : dc; \text{ also ist } \frac{de}{dl} = \frac{dw}{\frac{1}{2}c} \text{ und:}$$

$$gw + kN = \frac{2b^2 \cdot dw}{c} = a \cdot 2dw = a\,(dw + n'N).$$

Summirt man alle Elementepaare, so ergibt sich die Fläche JsNm zwischen dem Halbkreis, der Curve und der Leitlinie, und durch Summirung aller Bögen wie dw, n'N u. s. w. der Halbkreis swm $= \pi \cdot \frac{c}{2}$; daher

$$\text{Fläche } JsNm = a \cdot \pi \frac{c}{2} = \frac{\pi}{2} b^2.$$

Vergleiche damit Satz 102, und die Folgerungen in §. 13.

Anmerkung. Auf ähnliche Weise kann auch für die untere Fläche der Curve der Inhalt auf elementarem Weg gefunden werden.

§. 15. Inhalt der Fläche zwischen Pol und Leitlinie.

Nach Gl. 18 ist $y \pm x \sqrt{\frac{c - a - x}{a + x}}$, wenn die Abscissen vom Pol aus gegen den Scheitel der Ovale gerechnet werden; also:

$$y = \mp x \sqrt{\frac{c - a + x}{a - x}}$$

für Abscissen wie pD Fig. 1 vom Pol aus gegen m.

Daher ist $Jnh = \int y dx = \int x dx \sqrt{\frac{c - a + x}{a - x}} =$

$$Jnh = \int \frac{(c - a + x)\, x dx}{\sqrt{(a - x)\,(c - a + x)}}.$$

Zur Abkürzung setzen wir $a - x = u$, so ist $dx = -du$ und $x = a - u$, also:

$$Jnh = \int \frac{(c - u)\,(a - u) \cdot -du}{\sqrt{(cu - u^2)}} =$$

$$-b^2 \int \frac{du}{\sqrt{(cu - u^2)}} + (a + c) \int \frac{udu}{\sqrt{(cu - u^2)}} - \int \frac{u^2 du}{\sqrt{(cu - u^2)}}.$$

Das 3te $\int$ ist $= \left(\frac{u}{2} + \frac{3c}{4}\right) \sqrt{(cu - u^2)} - \frac{3c^2}{8} \int \frac{du}{\sqrt{(cu - u^2)}}$

das 2te $= (a + c) \cdot -\sqrt{(cu - u^2)} + \frac{(a + c)c}{2} \int \frac{du}{\sqrt{(cu - u^2)}}$.

Diese und das 1te $\int$ vereinigt, geben:

$$= \left(\frac{u}{2} - a - \frac{c}{4}\right) \sqrt{(cu - u^2)} - \left(\frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{8}\right) \cdot 2 \arc\left(\mathrm{Sin} = \sqrt{\frac{u}{c}}\right)$$

und wenn für u der Werth $a - x$ gesetzt wird, so folgt:

$$J = -\left(\frac{a}{2} + \frac{x}{2} + \frac{c}{4}\right) \sqrt{(a - x)\,(c - a + x)} - \left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right) \arc\left(\mathrm{Sin} = \sqrt{\frac{a - x}{c}}\right) + C$$

Da für $x = o$ (im Pol p) dieser Inhalt $= o$ wird, sowohl in dem Falle, wenn $c = a$, als auch für $c > a$, so ist

$$o = -\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{4}\right) \sqrt{(ac - a^2)} - \left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right) \arc\left(\mathrm{Sin} = \sqrt{\frac{a}{c}}\right) + C$$

also $C = \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{4}\right) \sqrt{(b^2 - a^2)} + \left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right) \arc\left(\mathrm{Sin} = \frac{a}{b}\right)$.

Hieraus folgt nun die Inhaltsformel für die bei-

den Fälle, wo c ≥ oder = a, also auch b ≥ oder = a ist:

111) Jedes Segment (wie paE Fig. 3) der untern Fläche für pa = x:

$$= \tfrac{1}{4}\left(a+\frac{c}{2}\right)\sqrt{(b^2-a^2)} - \tfrac{1}{4}\left(a+x+\frac{c}{2}\right)\sqrt{(a-x)(c-a+x)} +$$

$$+ \left(b^2-\frac{c^2}{4}\right)\left[\operatorname{arc}\left(\operatorname{Sin}=\frac{a}{b}\right) - \operatorname{arc}\left(\operatorname{Sin}=\sqrt{\frac{a-x}{c}}\right)\right].$$

Für x = a folgt die unendliche Flächenhälfte Nmp Fig. 3 und:

112) Die Fläche MpN Fig. 3 zwischen Pol und Leitlinie:

$$\mathrm{MpN} = \left(a+\frac{c}{2}\right)\sqrt{(b^2-a^2)} + 2\left(b^2-\frac{c^2}{4}\right)\operatorname{arc}\left(\operatorname{Sin}=\frac{a}{b}\right).$$

Hier stellt das 1te Glied den Inhalt des 4ecks pk'Ck vor, dessen 2 Seiten an p die Poltangenten = b sind, und von dem 2 Ecken im Kreismittelpunkt C und im Pol p liegen.

Für b = a und c = a, wie bei Fig. 2, folgt:

113) Inhalt der Cyssoidenfläche $= 3\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$, d. h. = dem dreifachen zugehörigen Kreis; also auch = dem Inhalt einer Cykloide, welche zu demselben Kreis gehört.

Wenn c = 2a ist, also bei dem offenen Theil der harmonischen Curve, und $b^2 = 2a^2$; so folgt aus 112:

114) Der asymptotische Theil der Fläche der harmonischen Curve

Fig. 1, $\mathrm{NpJ}' = 2a^2 + \frac{\pi a^2}{2}$, d. h.

= dem Inhalt eines Halbkreises, dessen Radius der Polabstand ist, mehr dem umgeschriebenen Rechteck dieses Halbkreises.

Ein sehr einfaches Resultat gilt für den Fall, wenn b = 2a (also c = 4a Fig. 3); es wird nämlich dann:

Inh. MpN $= 3a^2\sqrt{3}$.

Da für die Poltangenten pk und pk' = b, weil hier b = 2a, ∠ mpk = 60°, so ist $\triangle \mathrm{mpk} = \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{3}$ und $\triangle \mathrm{k'pk} = a^2\sqrt{3}$, mithin:

115) **Der Inhalt der unendlichen Curvenfläche** MpN (wenn b = 2a) **ist = dem dreifachen Inhalt des durch die Poltangenten gebildeten (eingeschriebenen) Dreiecks** ($= 3a^2\sqrt{3}$).

Auch ist hier der Inhalt = dem Viereck pk'Ck.

Diese Formel folgt auch aus der Vergleichung dieser Curve mit dem descartischen Folium, siehe §. 6, 8.

Da nämlich alle Ordinaten der betr. unteren Kreisconchoide = den zugehörigen der descartischen Curve mal $\sqrt{3}$ sind; so verhalten sich auch je zwei zusammengehörige Flächenelemente wie $\sqrt{3} : 1$, oder:

Der asymptotische Theil der Fläche dieser Kreisconchoide ist = dem zugehörigen der descartischen Curve mal $\sqrt{3}$.

Für den Fall, daß $b < a$, also $\frac{b^2}{a}$ oder $c < a$ ist, wie bei Fig. 4, ergibt sich bei Bestimmung der Constanten aus der Gleichung für J (siehe Ableitung zu Nro. 111):

$$J = -\left(\frac{a}{2} + \frac{x}{2} + \frac{c}{4}\right)\sqrt{(a-x)(c-a+x)} - \left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right)\operatorname{arc}\left(\operatorname{Sin} = \sqrt{\frac{a-x}{c}}\right) + C$$

Für $x = ps'$ (Fig. 4) $= a - c$, der Inhalt $= o$, daher:

$$o = -\left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right)\operatorname{arc}(\operatorname{Sin} = 1) + C;\quad C = \left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right)\frac{\pi}{2}.$$

116) **Daher ist der Inhalt eines Segments wie qrs' Fig. 4 der unteren Fläche (wenn $b < a$) für $x = pr$ als Abscisse vom Pol:**

$$\text{Inh.} = \left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right)\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\left(\operatorname{Sin} = \sqrt{\frac{a-x}{c}}\right)\right] - \frac{1}{2}\left(a + x + \frac{c}{2}\right)\sqrt{(a-x)(c-a+x)}.$$

Wird $x = pm = a$, so folgt durch Verdopplung:

117) **Die unendliche Fläche zwischen der unteren Curve und der Leitlinie** (Fig. 4) **für $a > b$ oder $a > c$:**

$$Js'J' = \pi\left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right), \text{ d. h.:}$$

Diese Fläche ist = dem Unterschied des Kreises, dessen Radius der Parameter ist und des Kreises s'm der Axe c.

Addirt man hierzu den Inhalt der oberen Fläche, welcher nach Nro. 103 $= \pi\left(\frac{c^2}{4} + b^2\right)$ war, so folgt:

118) **Wenn der Polabstand a größer ist als der Parameter b, so ist der Inhalt der ganzen Fläche, welche zwischen der oberen und unteren Curve liegt (die auf beiden Seiten bis ins Unendliche geht Fig. 4), = dem doppelten Inhalt eines Kreises, dessen Radius ln = dem Parameter ist = $2\pi b^2$.**

§. 16. Inhalt der Ovale der Curve.

Wenn $c > a$ also auch $b > a$, so hat die untere Curve einen blattähnlichen Theil ps' (Fig. 1 und 3), dessen Inhalt aus Nro. 111 folgt, wenn man dort x negativ annimmt (von p gegen s').

119) Die allgemeine Formel für den Inhalt eines Segments wie pg'f' ist daher für $pg' = x$:

$$pf'g' = \tfrac{1}{4}\left(a+\frac{c}{2}\right)\sqrt{(b^2-a^2)} - \tfrac{1}{4}\left(a+\frac{c}{2}-x\right)\sqrt{(a+x)(c-a-x)} +$$

$$+\left(b^2-\frac{c^2}{4}\right)\left[\operatorname{arc}\left(\operatorname{Sin}=\frac{a}{b}\right)-\operatorname{arc}\left(\operatorname{Sin}=\sqrt{\frac{a+x}{c}}\right)\right].$$

Daher ist die halbe Ovale für $x = ps' = c-a$, Fig. 1.

120a) $$pus' = \tfrac{1}{4}\left(a+\frac{c}{2}\right)\sqrt{(b^2-a^2)} +$$

$$+\left(b^2-\frac{c^2}{4}\right)\left[\operatorname{arc}\left(\operatorname{Sin}=\frac{a}{b}\right)-\frac{\pi}{2}\right] \text{ oder}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(a+\frac{c}{2}\right)\sqrt{(b^2-a^2)} - \left(b^2-\frac{c^2}{4}\right)\operatorname{arc}\left(\operatorname{Cos}=\frac{a}{b}\right).$$

Hier stellt das 1te Glied wieder das $\triangle$ pCk (Fig. 3) vor, wenn pk = b die Poltangente ist, und der $\sphericalangle$ dessen $\operatorname{Cos} = \frac{a}{b}$ ist $= \sphericalangle$ mpk.

120b) **Die ganze Ovale ps' Fig. 3 ist = dem Viereck pk'Ck der Poltangenten weniger $2\left(b^2-\frac{c^2}{4}\right)$ mal Bogen von mpk.**

Für $c = 2a$, $b^2 = 2a^2$ entsteht aus dem Viereck ein Quadrat $= 2a^2$ und $\sphericalangle$ mpk Fig. 3 wird in Fig. 1 (für $pb^2 = b^2 = 2a^2$) $= 45°$, daher das 2te Glied in 120b) $= 2a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} a^2$. Daher ist:

121) Der Inhalt der Ovale der harmonischen Curve $= 2a^2 - \frac{\pi}{2}a^2$, d. h. = dem Unterschied zwischen dem mit mp oder ps' Fig. 1 beschriebenen Halbkreis und dessen umgeschriebenem Rechteck.

Addire hiezu die Fläche JpJ' (siehe 114), so folgt:

122) Die ganze Fläche, welche von der harmonischen Curve und der Leitlinie eingeschlossen ist, muß $4a^2 = c^2$ oder = dem Inhalt des Quadrats sein, welches um den Kreis ms' gezeichnet wird.

Vergleiche die elementare Ableitung der betreffenden Sätze der Abhandlung über die harmonische Curve (siehe Einleitung).

Wird aber endlich $c = 4a$, oder $b = 2a$, so giebt Nro. 120b) und Fig. 3, $\sphericalangle$ mpk = 60°, $mk = a\sqrt{3}$, $mc = 2a$, Viereck $k'pkC = 3a^2\sqrt{3}$ ps' . np = $\triangle$ us'u' und $2\left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right) = o$, also:

123) Der Inhalt der Ovale, deren Axe $ps' = 3pm$, ist = dem gleichseitigen Dreieck us'u'' im Kreis über $ms' = 3a^2\sqrt{3}$.

Durch Vergleichung mit 115 folgt ferner (Fig. 3):

124) Der Inhalt der Ovale, deren Axe ps' dreimal so groß als der Polabstand, ist = dem Inhalt der zugehörigen asymptotischen Fläche MpN über dem Pol.

Diese beiden Flächen sind also zusammen = dem doppelten $\triangle$ uu's' = $6a^2\sqrt{3}$, d. h. den Inhalt eines regelmäßigen Sechsecks, dessen Seite = um, woraus folgt:

125) Für $c = 4a$ ist der Inhalt der ganzen unteren Fläche Mps'N = dem Inhalt des regelmäßigen Sechsecks im Kreis ms', dessen Seiten um u. s. w. = dem Parameter b sind.

Anmerkung. Diese Formeln ergeben sich (wie bei Nro. 115) ebenfalls aus dem Inhalt des zugehörigen descartischen Foliums, welcher nach §. 6, $\varepsilon = \frac{1}{4}b'^2$, also für $c = 4a$, $b' = 3a$, Inh. = $3a^2$, also der Inhalt der Ovale der unteren Kreisconchoide = $3a^2\sqrt{3}$, wie in 123.

Daraus folgen nun auf gleiche Art die Sätze 124 und 125.

Eine andere einfache Beziehung findet in diesem Fall ($c = 4a$) für denjenigen Theil der Ovale statt, der zwischen der größten Ordinate und dem Scheitel liegt.

Die Fläche pLL' Fig. 3 ist nach N. 119, welche doppelt genommen wird, (für $x = pR = a\sqrt{3}$ und $c = 4a$, $b = 2a$)

$pLL' = 3a^2\sqrt{3} - (3a - a\sqrt{3})\sqrt{(a + a\sqrt{3})(3a - a\sqrt{3})}$

$= 3a^2\sqrt{3} - a^2\sqrt{(3-\sqrt{3})^2 \cdot 2\sqrt{3}} = 3a^2\sqrt{3} - 2a^2\sqrt{2(2\sqrt{3}-3)}$

daher ist $LL's' = \text{Ovale} - pLL' = 2a^2\sqrt{3(2\sqrt{3}-3)}$.

Die größte Ordinate ist in diesem Fall ($c = 4a$) nach Nro. 46 $= a\sqrt{3(2\sqrt{3}-3)}$, daher der Satz:

126) Der Inhalt des Segments der Ovale zwischen dem Scheitel und den 2 größten Ordinaten LL's' Fig. 3 (für $c = 4a$) ist = einem Rechteck, dessen Grundlinie LL' und dessen Höhe = dem Polabstand pm ist, oder = $\frac{1}{4}$ des umschriebenen Rechtecks der Ovale ps'.

Derselbe Satz gilt auch für die betreffende Fläche 2FRs' des descartischen Foliums.

§. 17. Inhalte der Rotationskörper, welche durch Umdrehung um die Axe ms (ms') entstehen.

In N. 19 ist die Gleichung der oberen Curve, wenn x die Absciße vom Scheitel s bezeichnet:

$$y = \frac{c + a - x}{c - x}\sqrt{(cx - x^2)};\quad y^2 = \frac{(c + a - x)^2 x}{c - x}.$$

Da nun für irgend ein rechtwinkliches Segment fsF (Fig. 2):

$$\text{Jnh} = \pi\int y^2 dx = \pi\int\frac{(a + c - x)^2 x dx}{c - x},\ \text{so ist:}$$

$$\frac{\text{Jnh}}{\pi} = +a^2\int\frac{x dx}{c - x} + 2a\int x dx + \int(c - x)\, x dx$$

$$\frac{J}{\pi} = a^2[-x - c\,\text{lognat}\,(c - x)] + ax^2 + \frac{c}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + C.$$

Da für $x = o$, $J = o$ wird, so ist:

$o = -\pi a^2 c\,\text{lognat}\,c + C$, also $C = \pi a^2 c\,\text{lognat}\,c$, und

127) $\pi\left[ax(x - a) + x^2\left(\frac{c}{2} - \frac{x}{3}\right) + a^2 c\,\text{lognat}\,\frac{c}{c - x}\right]$

= Cub. Inhalt irgend eines Segments ⊥ Axe ms.

Für das Segment v's v Fig. 1 bis zum Kreismittelpunkt c ist $x = \frac{c}{2}$,

$$\text{Jnh } v'sv = \pi\left[\frac{ac}{2}\left(\frac{c}{2}-a\right)+\frac{c^3}{12}+a^2c\ \text{lognat}\ 2\right]$$

$$= \frac{\pi c^3}{12}+\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 . a+\pi a^2c\ (\text{lognat}\ 2-\tfrac{1}{2}).$$

128) $$\text{Jnh } v'sv = \frac{\pi c^3}{12}+\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 a+\pi\,(0{,}62152\ .\ a)^2 . \frac{c}{2}.$$

Der Jnhalt des Körpersegments v'sv Fig. 1 ist also = dem Jnhalt der eingeschriebenen Halbkugel e''se' mehr zwei Cylindern, von welchen der eine den Kreis e''e' zur Grundfläche und mp zur Höhe und der andere 0,62152a (oder ungefähr $\frac{23}{37}$a) zum Radius — und cs zur Höhe hat.

129) Für den Fall a = c (Fig. 2) ist der Jnhalt des Segments bis cv = 0,52648 πa^3 oder (ungefähr) = $\frac{7}{5}$ mal dem Jnhalt des eingeschriebenen Kegels (da cv = $\frac{3}{4}$ a).

Wird p der Anfangspunkt der Absciffen für die untere Curve, also nach Nro. 18, für pg' (Fig. 1) = x:

$$y^2 = \frac{x^2(c-a-x)}{x+a},\ \text{so ist Jnh} = \pi\int y^2dx,$$

$$\text{Jnh} = \pi\int\left[\frac{cx^2dx}{a+x}-x^2dx\right] = \pi\left[c\int\frac{x^2dx}{a+x}-\int x^2dx\right]$$

$$\text{Cub} \quad \pi c\left[\frac{x^2}{2}-ax+a^2\ \text{lognat}\ (a+x)\right]-\pi\frac{x^3}{3}+C.$$

Für x = o wird Cub = o, also $C = -\pi a^2c$ lognat a, daher:

130) $$\text{Segment pg'} = \pi c\left[\frac{x^2}{2}-ax+a^2\,\text{lognat}\,\frac{a+x}{a}\right]-\frac{\pi}{3}x^3.$$

131) Für x = c — a folgt der Jnhalt des birnförmigen Körpers:

$$ps' = \pi c\left[\frac{c^2}{6}-ac+\frac{a^2}{2}+a^2\,\text{lognat}\,\frac{c}{a}\right]+\frac{\pi}{3}a^3.$$

132) Wird c = 2a, wie bei der harmonischen Curve, so ist:

Cub.Jnh. ps' = πa^3 [lognat 4 — $\frac{1}{3}$] = 0,16638a^3;

oder nahezu = $\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{6}$ des umgeschriebenen Würfels.

(Vergleiche Satz 146 und 147 der harmon. Curve.)

133) Für $c = 4a$ (wie in Fig. 3) wird aus 131 der birnförmige Körper:

$ps' = \pi a^3 [8 \text{ lognat } 2 - 3] = 2{,}54518\,\pi a^3 =$
$= 0{,}09426\,\pi \cdot ps'^3$; oder nahezu $= 8a^3$.

134) Der Körper, welcher durch die Umdrehung der Hälfte des descartischen Foliums (siehe §. 6) entsteht, muß $= \frac{1}{3}$ dem 3ten Theil des Inhalts des zugehörigen birnförmigen Körpers ps' (Nro. 133) sein; da für cylindrische Elemente in beiden Körpern, die Radien der Elemente des 1ten $=$ den Radien der Elemente des 2ten getheilt durch $\sqrt{3}$, daher die Kreise und die Inhalte der Elemente im Verhältniß wie $1 : 3$ stehen (Satz 31). Daraus folgt:

135) Der Inhalt des Körpers pFs' Fig. 3, welcher durch das descartische Folium entsteht, ist:

$pFs' = 0{,}03142\,\pi \cdot ps'^3$, oder nahezu $= \frac{8}{81} \cdot s'p^3$.

§. 18. Inhalt der Umdrehungskörper, deren Axe die Leitlinie ist.

Fig. 1. Der Inhalt eines Elements, welches durch Umdrehung von Tv um die Axe mJ' entsteht, ist $= \pi \cdot Tv^2 \cdot d(mT)$ also für die Abscisse $mc = x$, da $mT = y$;

$$\text{Element} = \pi \cdot x^2 dy = \pi \cdot x^2 d\left[(a+x)\sqrt{\frac{c-x}{x}}\right], \text{ (Nr. 13).}$$

Daraus der Rotationskörper von smJ' mit der Axe mJ':

$$\frac{Jnh}{\pi} = \int x^2 \left[(a+x) \cdot \frac{-c\,dx}{2x\sqrt{(cx-x^2)}} + \frac{dx}{x}\sqrt{(cx-x^2)}\right]$$

$$= -\frac{ac}{2}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{cx-x^2}} + \frac{c}{2}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(cx-x^2)}} - \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(cx-x^2)}}, \text{ woraus:}$$

$$\frac{Jnh}{\pi} = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{cx}{6} + \frac{c^2}{4} + \frac{ac}{2}\right)\sqrt{(cx-x^2)} -$$

$$- \left(\frac{ac^2}{4} + \frac{c^3}{8}\right) : 2 \cdot \text{arc}\left(\text{Sin} = \sqrt{\frac{x}{c}}\right)$$

für $x = o$ wird $Jnh = o$, also die Constante $= o$, daher:

136) $$Jnh = \pi\left[\left(\frac{x^2}{3} + \frac{cx}{6} + \frac{c^2}{4} + \frac{ac}{2}\right)\sqrt{(cx-x^2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{c^2}{4}(c+2a)\,\text{arc}\left(\text{Sin} = \sqrt{\frac{x}{c}}\right)\right].$$

137) Für $x = c$ folgt der kelchförmige Körper, durch Umdrehung von msJ' um die Axe mJ'

$$= \frac{\pi^2 c^2}{8}(c + 2a).$$

Wenn $c = a$ (also bei der gleichseitigen Curve), so ist:

138) Der Rotationskörper, welcher durch Umdrehung der Hälfte der oberen gleichseitigen Curve Jsm (Fig. 2) um die Axe Jm entsteht $= \frac{5}{8}\pi^2 a^3$.

Diese Formel läßt sich in $\pi a^2 \cdot \frac{1}{2}(\frac{5}{4}\pi a)$ zerlegen, und da πa^2 den Inhalt des Begrenzungskreises ps und $\frac{5}{4}\pi a = \frac{1}{2}$. Halbkreisbogen sqp, so folgt der Satz:

139) Der Cubikinhalt des kelchförmigen Körpers, welcher durch Umdrehung der unendlichen gleichseitigen Flächenhälfte um die Leitlinie entsteht (wenn $c = a$), ist = dem Inhalt eines Kegels, der denselben Begrenzungskreis und eine Höhe $= \frac{5}{8}$ des Umfangs dieses Kreises hat.

140) Wird $c = 2a$ (Fig. 1) bei der oberen Curve, welche zu der harmonischen gehört, so gibt 137:

Jnh $= 2\pi^2 a^3$, oder $= \pi^2 \cdot \frac{c^3}{4}$. Nimmt man $Am = \frac{\pi c}{4}$ = dem Quadranten e'm, so gibt das Rechteck AA'sm bei Umdrehung um Am einen Cylinder, dessen Inhalt = demjenigen conchoidischen Körper ist, der durch Umdrehung der Flächenhälfte J'sm um J'm entsteht (wenn $c = 2a$).

141) Für $c = 4a$ (Fig. 3) gibt N. 137, den Inhalt des Rot.-Körpers von J'sm um J'm

$$\text{Jnh} = 12\pi^2 a^3 \text{ oder } = \tfrac{3}{8}\pi^2 c^3, \text{ d. h.:}$$

= dem Inhalt eines Cylinders, welcher denselben Begrenzungskreis (vom Radius sm) und eine Höhe $= mO = \frac{3}{4}$ des Quadranten mT hat.

Dreht sich aber die zwischen Pol und Leitlinie liegende Fläche um letztere, so entsteht ein Rotationskörper, dessen Inhalt wie bei Ableitung zu 136 gefunden wird. Da ein Element desselben, welches durch Umdrehung von TS (Fig. 1) entsteht $= \pi \, TS^2 d\,(mT) = \pi x^2 \cdot dy$

und nach Nro. 14, $y = (x - a)\sqrt{\frac{c - x}{x}}$ ist;